❖魔术扑克

(1) 魔术师从一副 52 张的扑克牌中任意抽出 5 张,看过以后,再从左到右在桌上排成一行,且让其中一张牌(不一定是第一张牌) 面向下,其余的牌面向上.魔术师要助手猜出面向下的那张牌.试证:这两人可以找到一种达成一致的约定,使得助手总能猜出正确的答案.

(2) 另一种玩法为魔术师藏起面向下的牌,其余 4 张面向上的牌仍然放在桌子上.问这两人是否可以找到达成一致的约定,使得助手总能猜出隐藏的那张牌?

解 (1) 将一副扑克牌从黑桃 A 到梅花 K 依次计数为 1,2,…,52.所以在抽出 5 张牌,且显示出 4 张牌后,将它们按数字大小次序排好,再从 49 到 52 计数.而其他面向下的牌按 1 到 48 计数.这 4 张面向上的牌有 4!种排列方式.今 $4!=24$,第一种排列方式为(49,50,51,52),第二种排列方式为(52,51,50,49).如果第 5 张面向下的牌的计数介于 1 到 24 之间,那么魔术师将 4 张面向上的牌,按照第 5 张牌的计数来选定 4 张牌的排列顺序,再把面向下的牌放在 4 张面向上的牌的左边,助手将会按照 4 张已知牌的排列数来确定第 5 张牌的计数.如果第 5 张面向下的牌的计数在 25 到 48 之间,那么魔术师将它放在 4 张牌的右边,助手按照 24 加上排列数来确定第 5 张牌的计数,从而猜出第 5 张面向下的牌.

(2) 有可能,但是魔术师和助手要利用 4 张已知牌的绝对值,而不是相对值.

下面来构造一个顶点分别在两个集合 X 和 Y 中的图,X 中每个顶点表示一组 5 张牌的集合,Y 中每个顶点表示一组 4 张牌的一个排列.如果 Y 中的一顶点所表示的 4 张牌的排列来源于 X 中某个顶点所表示的 5 张牌的集合,那么将这两个顶点连线,否则就不连线.如果对于每个 X 中顶点 x,都能找到 Y 中顶点 y 与之相连,那么魔术师和他的助手的任务就完成了.上面所说的图,因为顶点在两个集合中,所以叫做偶图.我们所寻找的边的集合称为 X 饱和匹配,这是因为 X 中的每个顶点,都有 Y 中一些顶点与之匹配,虽然并不一定可逆.

著名的 Hall 定理告诉我们,一个偶图有一个 X 饱和匹配当且仅当

$$|A|\leqslant|N(A)|$$

其中,A 为 X 的子集,$N(A)$ 为 Y 的子集,它包含了所有与 A 中的点 x 相连的 Y 中的点 y.在我们讨论的问题中,取 A 与 X 的一个子集,使得 $x\in A$,x 都与 $5\cdot 4!$ 个 Y 中的点 y 相连,这里出现的 5 是由于 5 张牌中取 4 张面向上,这一共有 5 种取法,而 4 张牌又有 4! 种不同的排法.因此从 A 到 $N(A)$,共有 $120|A|$ 条边,而且每个 y 都与 48 个 x 相连.这是因为对 4 张牌的每一个排列,选第 5 张牌都有 48 种选法,因此终点在 $N(A)$ 中的边共有 $48|N(A)|$ 条,但是终点在 $N(A)$ 中的边,其起点不一定在 A 中.这就证明了

$$120|A|\leqslant 48|N(A)|$$

所以

$$|A|\leqslant\frac{48}{120}|N(A)|=\frac{2}{5}|N(A)|<|N(A)|$$

由 Hall 定理,存在一个 X 饱和匹配.所以当 5 张牌被抽出时,魔术师用顶点 x 构成集合 A,找出与 x 匹配的 y,这个 y 用来表示 4 张牌的排列.助手便可将这一步骤逆过来,找出 5 张牌构成的集合 X,因而猜出第 5 张牌.

注 为求完整性,我们给出 Hall 定理的证明.为此对 X 应用归纳法.当 $|X|=1$ 时,Hall 定理成立.假设当 $|X|\leqslant n-1$ 时,Hall 定理成立.现在来讨论当 $|X|=n$ 的情形.这时出现两种情形:

ⅰ 设对 X 的每个子集 $A(A\neq\varnothing, A\neq X)$,都有 $|A|<|N(A)|$.任取一个 x,将任一个和它相连的 y 与之匹配,并取出这两个顶点.在余下的偶图中,对任一 $X-\{x\}$ 中子集 A,仍有 $|A|\leqslant|N(A)|$,其中当 $y\notin N(A)$ 时,$N'(A)=N(A)$.当 $y\in N(A)$ 时,$N'(A)=N(A)-\{y\}$.由归纳假设,有一 $X-\{x\}$ 饱和匹配.再加上边 (x,y),则在原图中有一个 X 饱和匹配.

ⅱ 设 X 的某一子集 $B(B\neq\varnothing, B\neq X)$,有 $|B|=|N(B)|$,那么我们将原图分成两个子偶图.一个是 B 和 $N(B)$ 中的点,另一个是 $X-B$ 和 $Y-N(B)$ 中的点,注意到一些边可能会丢失.由于当 A 是 B 的子集时,$N(A)$ 是 $N(B)$ 的子集.由归纳假设,第一个子图有一个 B

饱和匹配.设在第二个图中,存在 $X-B$ 的一个子集,适合 $|N'(C)|<|C|$,其中 $N'(C)$ 是 $Y-N(B)$ 中所有与 C 中的点 x 相连的点 y 的集合.需要注意的是,$N(C)$ 中的某些点可能不在 $Y-N(B)$ 中.在原来的偶图中,令 $D=B\cup C$,那么 $N(D)=N(B)\cup N(C)$.因此

$$|N(D)|=|N(B)|+|N'(C)|<|B|+|C|=|D|$$

这推出矛盾.因此对任意 $Y-B$ 中的子集,$|A|<|N'(A)|$.由归纳法假设,第二个子图有一个 $X-B$ 饱和匹配.两个子图的匹配能联合成原图中的一个 X 饱和匹配.