❖鲑鱼闯瀑布

沿山溪游动的鲑鱼必须闯过两道瀑布.在这个试验中,鲑鱼闯过第一道瀑布的概率是 $P > 0$,闯过第二道瀑布的概率是 $Q > 0$.假定闯过瀑布的试验是独立的.

试求在 n 次试验中鲑鱼不能闯过两道瀑布的条件下,鲑鱼在 n 次试验中不能闯过第一道瀑布的概率.

解　设 A_n 是鲑鱼在 n 次试验中不能闯过第一道瀑布的事件,B_n 是在 n 次试验中不能闯过两道瀑布的事件.因为在一次试验中不能闯过第一道瀑布的概率是 $1 - P$,而且试验是独立的,所以

$$P(A_n) = (1 - P)^n \tag{①}$$

事件 B_n 由下列事件组成:鲑鱼在 n 次试验中不能闯过第一道瀑布,或者鲑

鱼在第 k 次试验($1 \leqslant k \leqslant n$)中闯过第一道瀑布,但在后 $n-k$ 次试验中没有闯过第二道瀑布,因此

$$P(B_n) = (1-P)^n + \sum_{k=1}^{n}(1-P)^{k-1}P(1-Q)^{n-k} \qquad ②$$

如果 $P = Q$,那么式②变成

$$P(B_n) = (1-P)^n + \sum_{k=1}^{n}(1-P)^{n-1}P = $$
$$(1-P)^n + nP(1-P)^{n-1} \qquad ③$$

如果 $Q = 1$,那么鲑鱼一次试验就闯过第二道瀑布,所以

$$P(B_n) = (1-P)^n + (1-P)^{n-1}P = (1-P)^{n-1} \qquad ④$$

因此,如果鲑鱼在 n 次试验中不能闯过第一道瀑布,或者仅仅在第 n 次试验中闯过第一道瀑布,那么事件 B_n 发生.

但是,如果规定 $0^0 = 1$,那么式④可由式②推得.

如果 $P \neq Q$ 且 $Q < 1$,那么应用几何级数求和公式可将式②右变换为

$$P(B_n) = (1-P)^n + P(1-P)^{n-1}\frac{1-\left(\frac{1-P}{1-Q}\right)^n}{1-\left(\frac{1-P}{1-Q}\right)} =$$
$$(1-P)^n + (1-Q)^n\frac{P}{P-Q}\left[1-\left(\frac{1-P}{1-Q}\right)^n\right] =$$
$$(1-P)^n + \frac{P}{P-Q} - [(1-Q)^n - (1-P)^n] =$$
$$\frac{P(1-P)^n - Q(1-P)^n}{P-Q}$$

于是在这种情形下

$$P(B_n) = \frac{P(1-P)^n - Q(1-P)^n}{P-Q} \qquad ⑤$$

如果事件 A_n 不发生,那么事件 B_n 更不会发生.因此 $A_n \cap B_n = A_n$.按条件概率公式得

$$P(A_n \mid B_n) = \frac{P(A_n \cap B_n)}{P(B_n)} = \frac{P(A_n)}{P(B_n)} \qquad ⑥$$

当 $n = 1$,由已知条件知 $P(A_n) = 1 - P$,$P(B_n) = 1$.代入条件概率公式⑥,得 $P(A_n \mid B_n) = 1 - P$.下面我们假定 $n \geqslant 2$.

注意,如果 $P \neq Q$,那么 $P(B_n) \neq 0$,事实上,如果 $P(B_n) = 0$,那么由式⑤可得 $P(1-Q)^n = Q(1-P)^n$,因此

$$\frac{P}{Q} = \left(\frac{1-P}{1-Q}\right)^n \qquad ⑦$$

但是,如果(比如说)$P < Q$,那么 $1 - P > 1 - Q$,因而 ⑦ 不成立.类似地,当 $P > Q$ 时,等式 ⑦ 也不可能成立.

如果 $P = Q$,并且 $P(B_n) = 0$,那么从式 ③ 推知 $P = 1$.因此,当且仅当 $P = Q = 1$ 时,条件概率 $P(A_n \mid B_n)$ 不存在.

我们计算其他情形.

当 $P = Q < 1$,由式 ①,③,⑥ 得

$$P(A_n \mid B_n) = \frac{1 - P}{1 - P + nP} = \frac{1 - P}{1 + (n - 1)P} \tag{8}$$

当 $P < Q = 1$ 时,可由式 ①,④,⑥ 求得

$$P(A_n \mid B_n) = 1 - P \tag{9}$$

当 $P \neq Q < 1$ 时,应用式 ①,⑤,⑥ 可将条件概率化为

$$P(A_n \mid B_n) = \frac{(1 - P)^n(P - Q)}{P(1 - Q)^n - Q(1 - P)^n} = \frac{(P - Q)\left(\dfrac{1 - P}{1 - Q}\right)^n}{P - Q\left(\dfrac{1 - P}{1 - Q}\right)^n} \tag{10}$$

注　现在指出在研究的每种情况下条件概率的极限值 $g = \lim\limits_{n \to \infty} P(A_n \mid B_n)$.当 $P = Q < 1$,由式 ⑧ 得 $g = 0$.当 $P < Q = 1$,由式 ⑨ 可得 $g = 1 - P$.如果 $P < Q < 1$ 那么

$$1 - P > 1 - Q, \lim_{n \to \infty}\left(\frac{1 - P}{1 - Q}\right)^n = \infty$$

这就是说,对于条件概率 ⑩,$g = \dfrac{P - Q}{-Q} = 1 - \dfrac{P}{Q}$.如果 $Q < P \leqslant 1$,那么 $1 - P < 1 - Q, \lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{1 - P}{1 - Q}\right)^n = 0$,因而对条件概率 ⑩,$g = 0$.

总之,在所有情形

$$g = \max\left(0, 1 - \frac{P}{Q}\right)$$