

❖ 邮寄窗口

国外邮寄包裹时,只要它的长度与最大周长(依垂直于长度的方向来度量)的和不超过72英寸(1英寸 = 2.54厘米)时,则不管它的质量,均按小包邮件寄运.问寄小包的正方形窗口,至少应是多大,才可使一切合于上述规定的矩形小包裹箱能顺利通过?

解 令 a, b, c 表矩形箱子尺寸,其中 $a \geq b \geq c$,则 a 是长, $2(b + c)$ 是周长.于是按矩形箱子的规定,所加的条件是 $a + 2(b + c) \leq 72$,一个箱子有两种方式可以刚好通过一个正方形窗口.这个问题不必考虑长度.第一种方式,箱

子的边平行于窗口的边,这时最小方窗的每边 e 等于 b ;另一种方式,箱壁平行于窗口对角线.这时知方窗每边的长 e 等于 $(b+c)/\sqrt{2}$. 最不利的是那样一些截面的箱子,它的长(按规定 a 不小于 b) 小到等于 b . 因为箱子以适当的倾斜去适应窗口,方窗的边长正比于包裹腰围长以使 $b+c$ 必是最大或 a 是最小. 那么,得出一立方体箱子 $a=b=c$. 但这不给出解答,因为一个立方体箱子在处于平行于窗口边的情况下,将通过一个较小的方形窗口. 因此,最坏的情形是,箱子的每一种形式(对角线和与地平行)下,都合适地密接窗口,所以 $e=b=(b+c)\sqrt{2}=a$, 或 $a+2(b+c)=(1+2\sqrt{2})e=72$, 而方窗口的每边等于 $72/(1+2\sqrt{2})$ 英寸或 18.807 英寸,面积为 353.702 平方英寸.

问题可以推广到对最小面积的矩形窗口来. 人们的第一个想法可能是: 这问题得不到答案. 然而,窗口的小边必然是 14.4 英寸,因为这刚够容许一个立方体箱子,其中 $a=b=c$ 及 $a+2(b+c)=72$. 此外大边满足一个类似于上面讨论而得到的方程.

为方便计,以 e 表窗口的短边,且设长边等于 b ,截面等于 $b \times c$ 的箱子,当它刚好以对角线密接窗口时,分长为 b 的边为线段 $2bc^2/(b^2+c^2)$ 和 $b(b^2-c^2)/(b^2+c^2)$,分长为 e 的边为线段 $2bc^2/(b^2+c^2)$ 和 $c(b^2-c^2)/(b^2+c^2)$. 更有 $a=b$ 时, $3b+2c=5e$. 并且

$$\frac{2bc^2}{b^2+c^2} + \frac{c(b^2-c^2)}{b^2+c^2} = e$$

于是

$$\frac{c}{e} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{b}{e}\right)$$

代入

$$\frac{(c/e)[3(b/e)^2 - (c/e)^2]}{(b/e)^2 + (c/e)^2} = 1$$

我们有

$$9(b/e)^3 + 101(c/e)^2 - 285(b/e) - 1752 = 0$$

由此,立刻消去明显解 $b/e=1$, 剩下 $9(b/e)^2 + 110(b/e) - 175 = 0$. 因此 $b = 16\sqrt{46} - 88$ 或 20.157 英寸是面积仅 295.445 平方英寸的最小矩形窗口之最大边长.