❖均分蛋糕

一次晚餐会可能有 p 人或者 q 人参加(p 和 q 是给定的互质的整数).这次晚餐会准备了一个大蛋糕.问最少要将这蛋糕分成多少块(每块大小不一定相等),才能使 p 人或者 q 人出席的任何一种情形,都能平均将蛋糕分食.

解法 1 最少应将蛋糕切成 $p+q-1$ 块.不妨设蛋糕是长方形的.我们首先用平行于一对边的 $p-1$ 条平行线,将蛋糕划成 p 等份;再用同一方向的另外 $q-1$ 条平行线,将蛋糕划成 q 等份.然后沿所画的 $(p-1)+(q-1)=p+q-2$ 条线切割,将蛋糕切成 $p+q-1$ 块.这样的切割办法显然符合要求.

将证明块数 $p+q-1$ 不能再减小.为此,我们构造一个有 $p+q$ 个顶点的图.其中的 p 个顶点表示第一情形的 p 位来客,另 q 个顶点表示第二情形的 q 位来客.约定用图的边表示蛋糕的切块.每条边所连接的两个顶点分别为两种情形取食该块的客人.根据题目要求,对于两种来客情形,所有的切块分别被划成等分量的 p 堆,或者等分量的 q 堆,为客人所分食.在所构造的图中任意两个顶

点之间必有链相连.否则,将有顶点的一个连通分支不与其他顶点相连.设该连通分支含有第一情形顶点 a 个和第二情形顶点 b 个.显然 $a < p, b < q$.连通分支所含的这一部分蛋糕在两种来客情形分别能划成 a 个 $\frac{1}{p}$ 蛋糕份额和 b 个 $\frac{1}{q}$ 蛋糕份额.因此

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$$

其中,$a < p, b < q$,但这与 p 和 q 互质的条件相矛盾.

最后,我们指出:有 $p + q$ 个顶点的连通图至少有 $p + q - 1$ 条边.因此块数 $p + q - 1$ 是不能减少的.

解法2 不妨设 $p \leqslant q$.因为 p 与 q 互质,所以用辗转相除法(Euclid算法).最后求得的最大公约数应该是1.

$$\begin{cases} q = k_1 p + r_2, 0 < r_2 < p \\ p = k_2 r_2 + r_3, 0 < r_3 < r_2 \\ r_2 = k_3 r_3 + r_4, 0 < r_4 < r_3 \\ \vdots \\ r_{n-2} = k_{n-1} r_{n-1} + r_n 0 < r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} = k_n r_n, r_n = 1 \end{cases}$$

我们断言:将蛋糕切成 $p + q - 1$ 块是必要的和充分的.下面,对辗转相除法的算式数目进行归纳,以证明所断言的命题.

如果 $n = 1$,那么 $p = 1$.显然将蛋糕切成 q 块是必要而且充分的.此时自然有 $p + q - 1 = q$.现在,假定在来客数分别为 r_2 和 p 的前提下,将蛋糕切成

$$r_2 + p - 1$$

块是必要而且充分的.

回到来客分别为 p 和 q 的情形.首先将蛋糕切出 $k_1 p$ 块,每块的份额是整个蛋糕的 $\frac{1}{q}$.然后,将占蛋糕总量 $\frac{r_2}{q}$ 的剩余部分切分,使得有 p 位来客的第一种情形可将剩余蛋糕分成 p 等份,有 q 位来客的第二种情形可将剩余蛋糕分成 r_2 等份.根据归纳假设,只需将剩余蛋糕切成

$$r_2 + p - 1$$

块即可.于是,对于整个蛋糕而言,适合要求的切块总数为

$$k_1 p + r_2 + p - 1 = q + p - 1$$

还需证明此数是必须的.考察既可被 p 位客人等量取食又可被 q 位客人等量取食的任意一种切分蛋糕办法.不妨设蛋糕总量为 pq 个单位.将任一种适合要求

的切分方式用一个 $p \times q$ 矩阵$[a_{ij}]$表示.其中

$$a_{ij} \in \{0,1,2,\cdots,p\}$$

非0的 a_{ij} 就是蛋糕的一个切块的单位数.矩阵$[a_{ij}]$的非0元质数数目就是蛋糕的切块数.如果到达的客人是 p 位,那么就依次取第1行,第2行,……,第 p 行中非0数所表示的那些切块;如果到达的客人是 q 位,那么就依次取第1列,第2列,……,第 q 列中非0数所表示那些切块.因此,每行的元素和等于 q,每列的元素和等于 p.每一行至多有 k_1 个元素等于 p.假定每行都恰有 k_1 个元素等于 p,则可按照前面讨论中的办法去做.根据归纳假设,蛋糕的剩余部分至少必须切成 $r_2 + p - 1$ 块,总共切块数不少于 $p + q - 1$ 块.现在设某一行等于 p 的元质数目少于 k_1,不妨设是第 i 行,则该行至少有两个非0元素小于 p,设为 a_{ij} 和 a_{ik}.因为第 j 列元素之和等于p,所以该列至少还有另一个非0元素 a_{hj}.我们分别将 $a_{ij}, a_{ik}, a_{hj}, a_{hk}$ 更换成$a_{ij} + 1, a_{ik} - 1, a_{hj} - 1, a_{hk} + 1$,则矩阵元素的行和与列和都不改变,不会有小于0或大于 p 的元素出现,并且大于0的元质数不会增加.经过有限次这样的操作,必能使 a_{ij} 变成p.于是任意切分总可以化归到这样一种形式:其矩阵表示的每一行都恰有 k_1 个元素等于 p.于是,可以引用前面的讨论结果,最后完成证明.