

## ❖ 载重卡车

有几个同样重的集装箱质量共为 10 吨. 并且它们中间每一个箱子都不超过 1 吨. 问至少有几辆载重为 3 吨的汽车, 才能一次把这批货物运走?

**解** 5 辆载重为 3 吨的卡车. 首先来证明, 用 4 辆载重 3 吨的卡车是不够的, 现举一例, 假如有 13 个相同的集装箱, 每个质量为  $\frac{10}{13}$  吨, 那么我们就不能在载重 3 吨的卡车上装载 3 个以上的集装箱, 因而 4 辆载重 3 吨的卡车不能一次把这 10 吨货物运走. 现在来证明, 用 5 辆载重 3 吨的卡车就足够一次把这批货物运走. 对于每辆载重 3 吨的卡车, 我们能在每一辆车上装载不少于 2 吨的货物 (如果哪一辆车子装载货物少于 2 吨的话, 按条件每个箱子不超过 1 吨的货物, 那么还能增加一个集装箱的货物), 所以, 5 辆载重 3 吨的卡车, 能装载不少于 10 吨的货物. 因此有 5 辆载重 3 吨的卡车就足够了.

**注** 我们可以解决更一般的问题. 几个集装箱总质量为  $T$  吨, 并且其中每一个集装箱的质量均不超过 1 吨. 至少需要多少辆载重  $p$  吨 ( $p > 1$ ) 的卡车, 才能一次把这批货物运走?

设  $r = \lfloor \frac{T}{p} \rfloor + 1$ , 其中  $\lfloor p \rfloor$  是  $p$  的整数部分, 那么, 一般问题的答案是: 载重  $p$  吨的卡车至少需要的辆数  $N$  是刚好超过  $\frac{T-r}{p-r}$  的整数.

在开始已表明汽车辆数太少是不够用的, 而且所有的集装箱都要求相等. 集装箱装载到  $n$  辆  $p$  吨的汽车上, 其装法使用这样的辅助定理比较方便: 如果有若干个总质量超过  $p$  吨的集装箱 (每个不超过 1 吨), 那么总能在载重为  $p$  吨的汽车上装上质量比  $(p-r)$  吨大的集装箱. 在本问题中,  $p = 3, T = 10, r = \frac{3}{4}$ , 按辅助定理, 载重为 3 吨的汽车上能装载  $2\frac{1}{4}$  吨, 而所有集装箱总重为 10 吨, 所以我们知道有 5 辆载重量为 3 吨的汽车就能把这批货物一次运走, 而所需的最少辆数则刚好是超过  $\frac{T-r}{p-r} = \frac{37}{9}$  的整数.