

❖ 公寓电梯

一幢 $k(k > 2)$ 层楼的公寓有一部电梯,最多能容纳 $k - 1$ 个人.现有 $k - 1$ 个学生同时在第一层楼乘电梯,他们中没有两人是住同一层楼的.电梯只能停一次,停在任意选择的一层.对每一个学生而言,自己往下走一层感到一个不满意,而往上走一层有两倍的不满意.问电梯停在哪一层,使得不满意的总量达到最小?

解 设电梯停在第 i 层,则不满意的总量为

$$\begin{aligned} S &= (1 + 2 + \cdots + i - 2) + 2(1 + 2 + \cdots + k - i) = \\ &= \frac{(i - 2)(i - 1)}{2} + (k - i)(k - i + 1) = \\ &= \frac{1}{2}[3i^2 - (4k + 5)i] + k^2 + k + 1 \end{aligned}$$

所以,当 $i = N\left(\frac{4k+5}{6}\right)$ 时, S 最小. 其中 $N(x)$ 表示最接近于 x 的整数, 例如

$$N(3) = 3, N(5,7) = 6, N(2,3) = 2$$

当电梯停在 $N\left(\frac{4k+5}{6}\right)$ 层时, 不满意的总量最小.