

❖ 蝗虫跳动

三只蝗虫放在一条直线上,记为A,B,C.已知蝗虫B位于A与C的中点.每一秒钟,其中一个蝗虫选择其他的两个蝗虫之一,跳到它到关于被选择蝗虫的对称点上(若X跳过Y到X',那么 $XY = YX'$).经过若干次跳动之后,它们回到原先的位置上(次序可能不同).求证:在这种情况下,B必定回到它原来的位置.

证明 把三只蝗虫移动的直线看成是一条数轴,最初蝗虫在0,1,2三处, n 秒钟之后,第一、第二、第三只蝗虫分别在 x_n, y_n, z_n 三处.显然,它们都是整数.

我们将用归纳法证明 x_n 和 z_n 是偶数,而 y_n 是奇数, $n = 0, 1, 2, \dots$,当 $n = 0$ 时, $x_0 = 0, y_0 = 1, z_0 = 2$.今设 x_k 和 z_k 是偶数,而 y_k 是奇数,这里 k 是某个非负整数.设第一只蝗虫跳过第二只,因此

$$x_{k+1} = y_k + (y_k - x_k) = 2y_k - x_k$$

所以 x_{k+1} 也是偶数.用同样的方法,可以考虑其他的情况,并且证明 x_{k+1} 和 z_{k+1} 都是偶数,而 y_{k+1} 为奇数.因此,对于任何整数 $n \geq 0$, x_n 和 z_n 为偶数,而 y_n 为奇数.若在第 m 秒钟之后,蝗虫回到开始的点,但可能次序不同,那么 $y_m = 1$.这

是因为 y_m 必为奇数, 又在集合 $\{0, 1, 2\}$ 中, 只有 1 是奇数.