❖万能砝码

是否存在 k 个质量为整数克数的砝码(不同砝码可能有相同质量),用天平可以称出从 1 g 到 55 g 的任何物体,甚至少了几个砝码也能做到这点.下面两种特殊情形存在吗?

(1) $k=10$,少了任何一个砝码;

(2) $k=12$,少了任何两个砝码.

解 (1) 考虑 Fibonacci 序列

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2),n=3,4,\cdots$$

初值为

$$f(1)=f(2)=1$$

我们取 n 个砝码,第 i 个砝码的质量为 $f(i)$,$1\leqslant i\leqslant n$.考虑质量为 w 的物体,这里 $1\leqslant w\leqslant f(n+2)-1$.用 n 个砝码可以称出该物体.

为了证明这点,我们用归纳法.当 $n=1$,$f(3)=f(2)+f(1)=2$,于是,$f(3)-1=1$,即 $w=1$.这自然可以用天平及质量为 1 的砝码称出物体.设对 $n\geqslant 1$ 时成立.考虑 $n+1$ 个砝码.由归纳法假设,n 个砝码 $f(1),\cdots,f(n)$ 可称出质量为 w 的物体,这里 $1\leqslant w\leqslant f(n+2)-1$.现在考虑的物体,质量范围为

$$1\leqslant w\leqslant f(n+3)-1=f(n+2)-1+f(n+1)$$

所以多了质量为

$$f(n+2) \leqslant w \leqslant f(n+2)-1+f(n+1)$$

的物体.但是砝码增加了一个,其质量为$f(n+1)$.注意到Fibonacci序列是严格单调递增的正整数序列,所以

$$f(n+2) \geqslant f(n+1)+1$$

因此,我们先放入砝码$f(n+1)$,问题化为用$f(1),\cdots,f(n)$来称质量为

$$1 \leqslant f(n+2)-f(n+1) \leqslant w \leqslant f(n+2)-1$$

的物体.由归纳法假设,这是可以做到的.所以用归纳法证明了断言.

现在丢去一个砝码,记作$f(i)$.我们来证明用质量为

$$f(1),\cdots,f(i-1),f(i+1),\cdots,f(n)$$

的砝码可以称质量为w的物体,其中,$1 \leqslant w \leqslant f(n+1)-1$.

为此仍用归纳法.当$n=2$时

$$f(n+1)-1=f(3)-1=f(1)+f(2)-1=1$$

所以物体的质量为1,而砝码为$f(1)=f(2)=1$.显然丢了一个,仍可称出物体质量.设$n \geqslant 2$,砝码

$$f(1),\cdots,f(i-1),f(i+1),\cdots,f(n)$$

可称出质量w在$1 \leqslant w \leqslant f(n+1)-1$的物体.现在考虑砝码$f(1),\cdots,f(n+1)$.若丢去$f(n+1)$,则砝码为$f(1),\cdots,f(n)$,前面已证它们可称出质量为$w$的物体,其中$1 \geqslant w \geqslant f(n+2)-1$.若丢去$f(i),i \in \{1,2,\cdots,n\}$,由归纳法假设$f(1),\cdots,f(i-1),f(i+1),\cdots,f(n)$ 可称出质量为 w 的物体,$1 \leqslant w \leqslant f(n+1)-1$.

现在考虑的物体的质量w有$1 \leqslant w \leqslant f(n+2)-1$,其中,$1 \leqslant w \leqslant f(n+1)-1$部分已可用

$$f(1),\cdots,f(i-1),f(i+1),\cdots,f(n)$$

称出,于是另一部分物体,质量w有

$$f(n+1) \leqslant w \leqslant f(n+2)-1$$

先将砝码$f(n+1)$放上,于是问题化为砝码$f(1),\cdots,f(i-1),f(i+1),\cdots,f(n)$可否称出质量$w$为

$$1 \leqslant w \leqslant f(n+2)-1-f(n+1)=f(n)-1<f(n+1)-1$$

的物体.由归纳法假设便证明了断言.

现在取$n=10$,于是

$$f(1)=f(2)=1,f(3)=2,f(4)=3,f(5)=5,f(6)=8$$
$$f(7)=13,f(8)=21,f(9)=34,f(10)=55$$

其中任意丢去一个砝码,仍可称出质量为w的物体,$1 \leqslant w \leqslant f(11)-1$.今

$$f(11) = f(10) + f(9) = 89$$

而题目限制为 $1 \leqslant w \leqslant 55$.所以证明了(1)成立.

(2)考虑广义 Fibonacci 序列

$$g(n) = g(n-1) + g(n-3), n \geqslant 4$$

初值为

$$g(1) = g(2) = g(3) = 1$$

这个广义 Fibonacci 序列仍然由严格单调递增的正整数序列构成,且 $g(n) \geqslant g(n-1) + 1$.和(1)一样可证:$n$ 个砝码 $g(1),\cdots,g(n)$ 可称出质量为 w 的物体,其中 $1 \leqslant w \leqslant g(n+3) - 1$.若丢去一个砝码,则可称出质量为 w 的物体,其中 $1 \leqslant w \leqslant g(n+2) - 1$.

下面来证明若丢去两个砝码,则可称出质量为 w 的物体,其中 $1 \leqslant w \leqslant g(n+1) - 1$.

当 $n = 3$,砝码为

$$g(1) = g(2) = g(3) = 1, g(4) - 1 = g(3) + g(1) - 1 = 1$$

即 $w = 1$.当然任意丢了两个砝码,仍可称出质量为 1 g 的物体.设 $n \geqslant 3$,且砝码为

$$g(1),\cdots,g(i-1),g(i+1),\cdots,g(j-1),g(j+1),\cdots,g(n)$$

这里 $i < j$,又质量为 w 的物体能被这 $n-2$ 个砝码称出,其中 $1 \leqslant w \leqslant g(n+1) - 1$.现在考虑 $n+1$ 个砝码 $g(1),\cdots,g(n+1)$,丢去两个砝码,要称质量为 w 的物体,这里 $1 \leqslant w \leqslant g(n+2) - 1$.若丢了一个砝码 $g(n+1)$,再丢一个砝码 $g(i)$,这里 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$.问题化为由砝码 $g(1),\cdots,g(i-1),g(i+1),\cdots,g(n)$ 来称质量为 w 的物体.上面已说明在 $1 \leqslant w \leqslant g(n+2) - 1$ 时就可以了.所以断言成立.若丢了两个砝码

$$g(i),g(j),i < j,i,j \in \{1,2,\cdots,n\}$$

由归纳法假设可知

$$g(1),\cdots,g(i-1),g(i+1),\cdots,g(j-1),g(j+1),\cdots,g(n)$$

可称出质量在 $1 \leqslant w \leqslant g(n+1) - 1$ 范围的物体.余下物体质量 w 的范围为

$$g(n+1) \leqslant w \leqslant g(n+2) - 1$$

在天平上先放上质量为 $g(n+1)$ 的砝码,问题化为用

$$g(1),\cdots,g(i-1),g(i+1),\cdots,g(j-1),g(j+1),\cdots,g(n)$$

来称质量为 w 的有限制

$$1 \leqslant w \leqslant g(n+2) - 1 - g(n+1)$$

的物体.今

$$g(n+2) - g(n+1) - 1 = g(n-1) - 1 < g(n+1) - 1$$

由归纳法假设,便证明可以称出物体.

现在取 $n=12$,有

$$g(1)=g(2)=g(3)=1, g(4)=2, g(5)=3$$
$$g(6)=4, g(7)=6, g(8)=9, g(9)=13$$
$$g(10)=19, g(11)=28, g(12)=41$$

而质量 w 的限制为 $1 \leqslant w \leqslant g(13)-1$,其中 $g(13)=60$. 所以 $g(1),\cdots,g(12)$ 中任意丢两个,可以称出质量范围为 $1 \leqslant w \leqslant 59$ 的物体,特别在 $1 \leqslant w \leqslant 55$ 的限制下.