❖黑白分明

用任意的方式,将平面上的每一个点染上黑色或白色.证明:一定存在一个边长为1或$\sqrt{3}$的正三角形,它的顶点是同色的.

证明 分两种情形来论证.假设平面上有异色两点A,B,使$AB=2$.取AB的中点C,它一定与A或B同色.不妨设A,C同色,以AC为一边作两个正三角形,另两个顶点记作D,E(图1),若D,E中有一个与A同色,则$\triangle ACD$或$\triangle ACE$的三顶点同色,且均是边长为1的正三角形,结论得证.若D,E与A染色不同,则$\triangle BDE$三顶点同色,并且是边长为$\sqrt{3}$的正三角形,结论也成立.

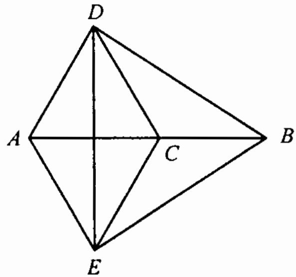

图1

假如平面上任何距离为2的两点均染同一颜色,则可证明所有点都染了同样颜色.事实上,任取平面上两点A,B,在连结这两点的线段上,从A开始,依次取相距为2的点C_1,C_2,$\cdots$,它们都与A同色,最后得到一点C_k,使$C_kB\leqslant 2$.

现在,以 C_kB 为底作腰长为 2 的等腰 $\triangle C_kDB$,依假设,C_k 与 D 同色,D 与 B 同色,于是 B 与 C_k 从而与 A 同色.这就证明了平面上任意两点同色.此时,任何边长为 1 或$\sqrt{3}$ 的正三角形的三顶点都同色,结论成立.