❖恰钉一次

将一些相同的正 n 边形餐巾纸放在桌子上,允许任两张餐巾纸有可能有部分重叠.设任两张餐币纸可经过平移将一张移到和另一张重叠,是否总可以在桌上钉一些钉子,使得每张餐巾纸恰好被钉上一次.

(1) $n = 6$;

(2) $n = 5$.

解 (1) 回答是可以做到的.

由 $n = 6$,餐巾纸为正六边形,边按逆时针方向定向.由于任两张餐巾纸可

经过平移而重叠. 所以任两张餐巾纸的六条边按相同定向互相平行. 因此可以在平面上作出大小和餐巾纸一样的正六边形网格,网格中每个正六边形和任一餐巾纸的六条边按相同定向互相平行. 所有餐巾纸的中心可构成两个集合,一个集合由这样的中心构成,这些中心都在网格线上,另一个集合由不在网格线上的中心构成. 前者记作 N,后者记作 M.

ⅰ 设 $N=\varnothing$,即所有餐巾纸的中心都不落在网格线上. 我们在网格的每个正六边形的中心钉上钉子. 这些钉子要么不钉在任一餐巾纸上,要么只钉上一次. 因为若有一张餐巾纸上被钉了两个钉子,那么餐巾纸的中心落在网格的两个不同的正六边形内,这是不可能的.

ⅱ 设 $N\neq\varnothing$. 由于餐巾纸只有有限张,所以 M 为有限集. 因此记 $d>0$, d 为 M 的中心和网格线的最近距离. 我们将网格平移小于 d 的距离. 于是 M 中点仍在网格线上. 由于 N 也为有限集,所以我们可以选取这种平移的方向,使得 N 中点也都不在新的网格线上. 于是对新的网格线,化为情形 ⅰ. 这证明了命题成立.

(2) 回答是做不到.

设餐巾纸由正五边形构成,边长为 1,边按逆时针方向定向. 取一个半径为 10 的圆 C. 下面给出餐巾纸的一种放置方法,使得每个中心在 C 内,且半径为 $\frac{1}{200}$ 的圆至少包含一个餐巾纸的中心. 由于餐巾纸的张数有限,这总是可以办到的. 在 C 中取一点 P,在点 P 钉上钉子,它钉在了所有中心落在某一个五边形内的餐巾纸上. 这个五边形的边长为 1,中心为点 P,按顺时针方向定向. 我们称这个五边形为点 P 的危险区.

现在考虑一组钉子,它们的危险区由一些五边形构成,且其中任两危险区中五边形可以经平移将一个和另一个重叠. 我们来证明存在一个半径为$\frac{1}{200}$,圆心在 C 中的圆,它或者不在任一危险区内,或者同时在两个危险区内. 但是这个圆至少包含一个餐巾纸的中心,因此这个餐巾纸或者不被钉,或者至少被钉两次. 下面来证明这一断言.

首先向中心收缩每个危险区,使其边长收缩为$\frac{99}{100}$. 出现两种情形:

ⅰ 设在圆 C 中有一点 X,这点至少包含在两个缩小后的危险区内. 当 X 是半径为$\frac{1}{200}$ 的一个圆的圆心时,这个圆包含在两个未收缩的危险区内. 事实上,由于从危险区的中心到它的边界上最近点的线段的长度大于$\frac{1}{2}$,所以将缩小后的危险区复原为原来大小的危险区,将使危险区的中心到它的边界上最近点的

线段长度大于$\frac{1}{200}$.

ⅱ 设任何两个收缩后的危险区都不相交,我们来证明在这两个危险区内,有足够的空隙放一个半径为$\frac{1}{200}$的圆.

事实上,假设一个收缩后的危险区有一个顶点 F 恰好正对着另一个收缩后的危险区的边AB.由于两危险区无公共交点,而 F 离AB边非常近,我们不妨认为它在 AB 边上.由对称性,无妨设 $AF \geqslant BF$.延长第二个危险区的另一个以 A 为顶点的边,它交第一个危险区的边界于点 K.如图 1.那么$\triangle AFK$在所有缩小的危险区之外.由于 $FK = AF \geqslant \frac{99}{200}$,并且 K 到AF的距离至少为

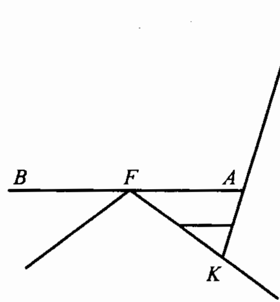

图 1

$$\frac{99}{200}\sin 36^\circ > \frac{99}{200}\sin 30^\circ > \frac{1}{5}$$

所以我们可以在 FK 和AK 的中点连线与AF 间放置一个半径为$\frac{1}{20}$的圆,它落在$\triangle AFK$ 内.设 Y 为这个圆的圆心,那么以 Y 为圆心,半径为$\frac{1}{200}$的圆便落在所有危险区之外.其原因在于从一个危险区的中心到其边界上的最远点的长度小于1,因此,收缩后的危险区在复原后将使它的边界向外移动的距离小于$\frac{1}{100}$.