❖公园的小树

设有一座圆形的公园，中心为 O，半径等于 50 m，以点 O 为坐标原点，选取过 O 的互相垂直的两条直线为坐标轴，建立平面直角坐标系. 并选取单位长度为 1 m. 如果在圆内除 O 以外的每个整点处都种上一棵小树，那么，当这些小树长得足够粗的时候，从园子的中心 O 环顾四周，视线都会被树干所遮断，使人看不到公园的边缘. 现在问当树干长到多粗时，才会发生所说的这种情况?

解 我们的答案是：当树干的半径大于$\frac{1}{50}$ m(即 2 cm)时，从点 O 朝任何方向看去，视线都会被遮断，而当树干的半径小于$\frac{1}{\sqrt{2\,501}}$ m 时，至少在一个方向

上视线不会被遮断.

引理 以原点 O 为对称中心,任意画一个长方形 $ABCD$(图 1).如果这长方形的面积大于 4,那么,在它里面除了点 O 外,一定还有其他的整点.

引理的证明 以那些坐标为偶数的整点$(2k,2l)$为中心,作出一系列边长为 2 的正方形.长方形 $ABCD$ 必定被某些这样的 2×2 的正方形所盖住,把这些正方形一个一个地剪下来,并把它们平行地移到和中心在 O 的那个 2×2 的正方形 1234 相重合的位置上去,自然,这时长方形 $ABCD$ 也被剪碎成好几片移到正方形 1234 里面去了.

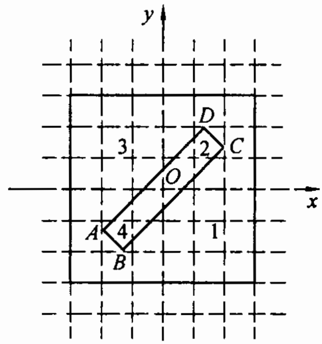

图 1

注意:正方形 1234 的面积等于 4,而长方形 $ABCD$ 的面积是大于 4 的.根据面积的重叠原则,至少有两个碎片会有公共点.设一个公共点的坐标是(s,t),其中 $-1\leqslant s\leqslant1$, $-1\leqslant t\leqslant1$.这就意味着,在原来的长方形 $ABCD$ 内有一个点 P,它的坐标是$(2m+s,2n+t)$;还有一个点 Q,它的坐标是$(2m'+s,2n'+t)$(图 2).

考察点 Q 关于原点 O 的对称点 Q'.由于已知长方形 $ABCD$ 关于原点对称,得知 Q' 必然也在此长方形内.由对称性可知 Q' 的坐标是$(-2m'-s,-2n'-t)$.既然 P 和 Q' 是长方形 $ABCD$ 之内的两个点,那么 P 和 Q' 的连线上的中点 R,也一定在这个长方形内.可算出 R 的两个坐标分别是

$$\frac{(2m+s)+(-2m'-s)}{2}=m-m'$$

$$\frac{(2n+t)+(-2n'-t)}{2}=n-n'$$

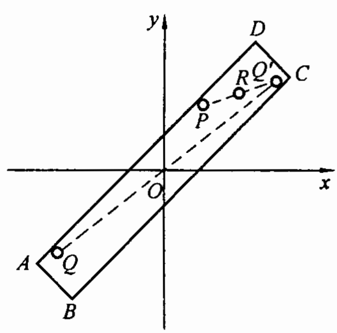

图 2

这表明 R 是包含在长方形 $ABCD$ 中的一个整点,并且,R 和原点 O 显然是不同的,这是因为,若 $R=O$,即得 $m=m'$, $n=n'$,也就是 $P=Q$,这是不可能的.引理证毕.

下面我们利用引理先证答案的第一部分.我们用 ρ 表示树干的半径,并设 $\rho>\frac{1}{50}$.显然,还必须认为 $\rho\leqslant\frac{1}{2}$.

在圆 O 中,取任一直径 AB(如图 3).过 A 和 B 两点分别作圆 O 的切线,并

作两直线 FG 和 EH 平行于 AB，且与 AB 的距离均为 ρ，这样就得到了一个长方形 $EFGH$。显然，长方形 $EFGH$ 的面积为

$$100 \times 2\rho > 100 \times 2 \times \frac{1}{50} = 4$$

因此，根据引理，在这个长方形内有一个整点 R。实际上，R 不但在这长方形内，而且还在公园内部，对于这一点，可以证明如下。

设 $R = (m, n)$，其中 m 和 n 均为整数。显然

$$m^2 + n^2 = OR^2 \leqslant OE^2 = 50^2 + \rho^2 \leqslant 50^2 + \frac{1}{4}$$

由于 $m^2 + n^2$ 是一个整数，上述不等式实际上是 $m^2 + n^2 \leqslant 50^2$，即 R 还在公园之内。R 的关于 O 的对称点 R' 应在此长方形内，并且也在公园之内。

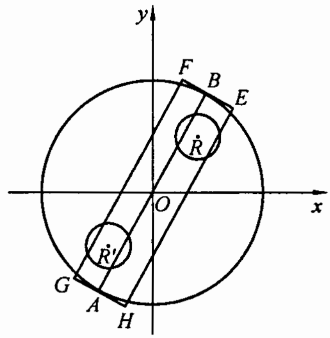

图 3

既然是 R 和 R' 都是公园内的整点，这两点都不与 O 重合，因此，这些点上是种了树的。很明显，以 R 和 R' 为圆心、以 ρ 为半径作出的两个小圆一定和直径 AB 在 O 的两边相交。这就是说，当 $\rho > \frac{1}{50}$ 时，OA 和 OB 两个方向的视线都会被树干遮断。由于直径 AB 是任意作的，所以，这时站在点 O 无论朝哪一个方向上看去，都将看不到公园的边界。

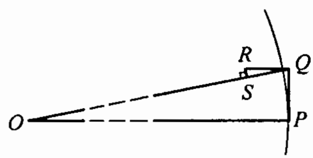

图 4

现在证明答案的第二部分。在坐标为 $(50,0)$ 的点 P 处作圆 O 的切线，在这切线上取坐标为 $(50,1)$ 的整点 Q(图 4)。很明显，在线段 OQ 上不再会有整点了。在圆内的整点中，离直线 OQ 最近的整点是 $R(49,1)$。作 $RS \perp OQ$。由于 $\triangle OPS \backsim \triangle QSR$，故有

$$\frac{RQ}{QO} = \frac{RS}{QP}$$

因此

$$RS = QP \cdot \frac{RQ}{QO} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{50^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2\,501}}$$

所以，当 $\rho < \frac{1}{\sqrt{2\,501}}$ 时，R 那一点上的树干不会遮断 OQ 方向的视线，其余整点上种的树，就更不可能干扰视线 OQ 了！(进一步研究详见附录(4))