❖放置正方形

给定一个边等于1的正方形.在该正方形范围内互不重叠地放置一些各边与给定正方形边平行的小正方形(小正方形的边长不一定相同).考察与给定正方形的某一条对角线相交的小正方形.试问所有这些与该对角线相交的小正方形周长的总和能否大于1 993?

解 参看图1.

设 $ABCD$ 是题中所述的单位正方形.过点 A 作对角线 BD 的垂线,该垂线与 BD 相交后,再向前按 $1:\alpha$ 的比例延长一小段(α 待稍后确定)到达点 C_0.过点 C_0 分别作 AB 边和 AD 边的垂线,与这两边分别交于点 B_0 和点 D_0,这样得到第一个小正方形 $AB_0C_0D_0$.下一步分别从点 B_0 和点 D_0 向 BD 作垂线,与 BD 相交后各向前按 $1:\alpha$ 的比例延伸,分别到达点 C_1 和点 C_2.分别以 B_0C_1 和 D_0C_2 为对角线作正方形 $B_0B_1C_1D_1$ 和正方形 $D_0B_2C_2D_2$.

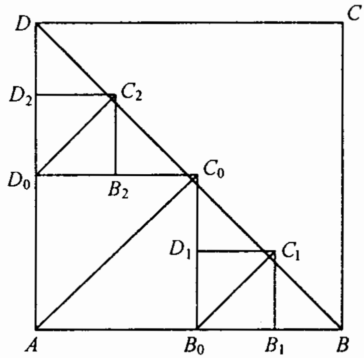

图1

这样得到第二和第三个小正方形.上述做法可以类似地继续进行下去,得到一系列互不重叠的小正方形,每一个都与对角线 BD 相交.

先来计算这一系列小正方形所覆盖的那部分 BD 的总长度.第一个小正方形所覆盖对角线 BD 的长度为 $\sqrt{2}\alpha$.系列中所有小正方形所覆盖的那部分 BD 的总长度为

$$\sqrt{2}\alpha[1+(1-\alpha)+(1-\alpha)^2+\cdots+(1-\alpha)^n]=\sqrt{2}\alpha\times\frac{1}{1-(1-\alpha)}=\sqrt{2}$$

再来计算系列中小正方形周长的总和.每个小正方形的周长与它所覆盖那部分 BD 的长度之比都相同.这比值是

$$\frac{1+\alpha}{\alpha}\sqrt{2}$$

因此,系列中所有小正方形的周长之和与它们所覆盖的对角线 BD 那部分总长之比也是同一值.因此,所求的周长之和等于

$$\frac{1+\alpha}{\alpha}\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\frac{1+\alpha}{\alpha}\times 2$$

取 $\alpha=\frac{1}{999}$,即可达到

$$\frac{1+\alpha}{\alpha}\times 2=2\,000>1\,993$$