❖巧涂玻璃片

有 1 987 片玻璃片,每片上涂有红、黄、蓝三色之一,进行下列操作:将不同颜色的两块玻璃片擦净,然后涂上第三种颜色(例如,将一块蓝玻璃和红玻璃片上的红色与蓝色擦掉,然后在两片上涂上黄色).证明:

(1) 无论开始时红、黄、蓝色玻璃片各有多少片,总可以经过有限次操作而使所有的玻璃片涂有同一种颜色;

(2) 最后变成哪一种颜色,与操作顺序无关.

解 设红片、黄片和蓝片的数目分别为 x,y,z. x,y,z 被 3 除后的余数中必有两个是相等的.

事实上,不妨设 $x=3a+1,y=3b+2,z=3c,a,b,c$ 为整数,又 $x+y+z=3(a+b+c+1)\neq 1\,987$.

显然是矛盾的,这就说明了 x,y,z 可由下式表示(这里可假设 y,z 是除 3 同余的)

$$x=3a+m,y=3b+n,z=3c+n$$

比较一下 y 和 z 的大小,不妨设 $c\geqslant b$. 若 $c=b$ 本题得证.

若 $c>b$,于是取黄片 $3b+n$,取蓝片 $3b+n$,按规则操作得证片数为 $3a+6b+m+2n$,黄片为零,蓝片为 $3(c-b)$.

接着,各取红片、蓝片 1 片,产生 2 片黄片,再各取蓝片、黄片 2 片,产生 4 片红片,于是红片数为 $3a+6b+m+2n+3$,黄片为零,蓝片为 $3(c-b-1)$. 如果 $c-b-1=0$,本题得证,否则类似再操作 k 次,直至 $c-b-1-k=0$. 最后所有玻璃片都涂上了红色.

很明显,最后产生 1 987 个红片,不是偶然的,完全是因为红片数除以 3 的余数和别的色片余数不同,不论如何操作,都不可能改变三者的余数之间的关系,即两个相等而异于第三个,故最后变成哪一种颜色,与操作顺序无关.