❖最小长度

设有 2^n 个由数字 0 和 1 组成的有限数列，其中没有任何一个数列是另一数列的前段. 数列的项数称为长度. 求这组数列的长度之和的最小值.

解　满足题中要求的数列组称为正规组，组中的数列，按其长度大于、等于或小于 n，分为长、标准和短三种. 如果组中所有数列都是标准的，则称为标准组，否则就称为非标准组.

长度为 n，每项都是 0 或 1 的所有不同的数列恰有 2^n 个，显然，它们组成一个标准正规组，其长度之和为 $n\cdot 2^n$. 所以，所求的最小值不超过 $n\cdot 2^n$. 下面我们来证明最小值就是 $n\cdot 2^n$，即证明任一正规组中所有数列的长度之和都不小于 $n\cdot 2^n$.

对于任一正规组，如果其中没有短数列，结论显然成立. 如果其中有短数列，那么它也必有长数列. 否则，任一短数列至少有两种可能在其尾部补上一些 0 或 1 而成为标准的而仍保持组的正规性，从而将得到一个由多于 2^n 个数列组成的标准正规组，这是不可能的. 可见，只需对既含短数列又含长数列的非标准正规组来论证.

对于任一数列 a，记其长度为 $\| a \|$. 设正规组中有短数列 S 和长数列 L，$\| S \| < n$，$\| L \| > n$，则 $\| L \| - \| S \| \geqslant 2$. 在正规组中去掉 S 和 L，添上数列 $S0$ 和 $S1$，则新组仍为正规组且组中各数列长度之和不增. 如果 $S0$，$S1$ 是标准的，则我们通过上述变换使标准数列的数目增加了两个. 如果 $S0$ 仍为短数列，于是组中仍有长数列，我们可再进行如上的变换并直到得出标准数列为止. 这样，上述一系列变换终于使标准数列增加了两个且组中数列长度之和不增.

如果此时组中还有短数列,又可重复上述变换过程,直到组中不含短的数列为止.由于 变化过程始终保证数列长度之和不增,这就证明了任一正规组中数列长度之和都不小于 $n \cdot 2^n$,即所求的最小值为 $n \cdot 2^n$.