❖弯曲河道

一条弯曲的河道，两边的河岸线都由若干段线段或圆弧组成(圆的半径不一定相等)．已知河的宽度不大于 1 km(这就是说，从此岸任一点游到彼岸不超过 1 km)．试问能否有一条船沿河道前进与两岸的距离始终不大于

(1) 0.7 km;

(2) 0.8 km.

解　(1) 回答是否定的．下面将举出一个符合题目所述条件的河道，但该河道中有一船位于离岸距离大于 0.7 km 的位置．河道的一部分是一个半径为 701 m 的圆形湖泊．沿该圆形的某直径方向双侧向外延伸着宽度为 ε 的运河道(运河道以该直径所在直线为中轴线)．请参看图 1.

设 OA 是与河道中轴线垂直的半径，则两岸间的最大距离应该等于 AB．对于足够小的 $\varepsilon > 0$，我们有

$$AB < AC + CB = 701\sqrt{2} + \frac{\varepsilon}{2} < 1\,000$$

但是河道内在 OA 直线上的任一点，至少离某一岸的距离大于 0.7 km.

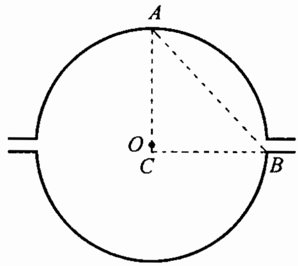

图 1

(2) 这是很困难的一个问题．一个完整的解答要写好多页，并且还要借助于著名的约当(Jordan) 曲线定理，至少是该定理的特殊情形．即使如此，也仍然很难说清楚．至今尚未找到一个完整清晰、简明扼要的解答.

对问题(2) 的回答是肯定的．我们只概述证明的基本思路，将不涉及技术细节.

假定有一条如题目所述的河道，以 O 为圆心，半径为 800 m 的一个圆完全在河道中．如图 2.

又如图 3 所示，考察河岸上的 6 个点 A, B, C, D, E, F．设点对(A, E)，(A, F)，(B, C)，(B, D) 之间的航行距离都小于 1 km.

为不失一般性，可设点 E 和点 C 在大于 $180°$ 的 $\angle AOB$ 内．过点 O 作直线 l_1 和 l_2，分别垂直于 OB 和 OA．显然点 E 在 l_1 下方，点 C 在 l_2 上方(否则将有

$AE > 1$ km,或者 $BC > 1$ km).

还可断定:或者河岸线 BE 分开 AC 连线,或者河岸线 AC 分开 BE 连线.不妨假定是前一种情形.则从 B 到 C 的航行距离将大于 BE.但 $BE > 1$ km,这导致矛盾.

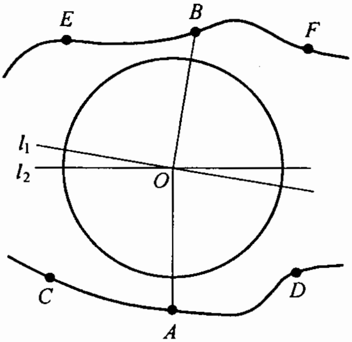

图 2

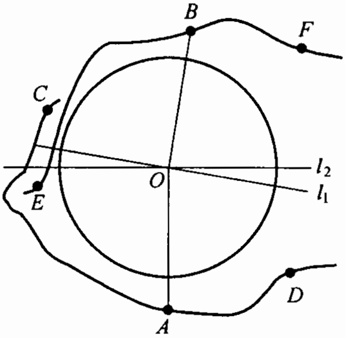

图 3