❖不胫而走

在某一居住区内有 1 000 个居民，每天他们之中每个人把昨天听到的消息告诉给自己所有的熟人，已知任何消息都将逐渐地为全区居民所知晓. 证明：可以选出 90 个居民，使得如果同时向他们报导某一消息，那么经过 10 天这一消息便为全区居民所知晓.

证明 由题设得，居住区的任何两个居民 A 和 Z 必有熟人链联系着，即 A 认识 B，B 认识 C，…，Y 认识 Z，否则，传给 A 的消息就不能为 Z 所知道，与题设矛盾. 我们将只考虑这样的熟人链，在链中每个成员只出现一次，如果链中某成员 M 出现两次，即含有闭合链 $M—N—\cdots—M$，我们可以割断 M，N 之间的联系，而从原有的整条链中删除 $N—\cdots—M$ 这一部分，剩下的还有链，那么，从没有闭合链的假设推得，任何两居民 A 和 Z 之间有且仅有一条熟人链，因为如果有两条链 $A—B—\cdots—Y—Z$ 和 $A—B'—\cdots—Y'—Z$，由于熟人关系是对称的，就有闭合链 $A—B—\cdots—Y—Z—Y'—\cdots—B'—A$，与假设矛盾，显然，我们只要在没有闭合链的假设下证明题设就够了.

上述联系两个居民的熟人链所有成员数目称为这两个居民的“距离”，可以选择两个居民 X 和 Y，他们的距离是最大的，我们研究联系他们的熟人链

$$X—A_1—A_2—\cdots—A_k—Y \quad ①$$

先设 $k \leqslant 19$(即链中不多于 21 人). 考虑这里适中的一个 A_m(k 是偶数时，$m = \frac{1}{2}k$ 或 $\frac{1}{2}k+1$；k 是奇数时，$m = \frac{1}{2}(k+1)$)，它到链的两端的距离都不超过链长的一半加 1，即小于或等于 $\frac{1}{2}(k+2)+1 \leqslant \frac{1}{2}(19+2)+1$，取整数得 11，于是 A_m 到其他每个居民的距离也都不超过 11，事实上，设 A_m 到任一居民 Z 的链是

$$A_m—B_1—B_2—\cdots—B_n—Z \quad ②$$

如果 B_1 不是 A_{m-1}，就是 X 到 Z 的链

$$X—A_1—\cdots—A_m—B_1—\cdots—B_n—Z \quad ③$$

如果 B_1 不是 A_{m+1}，就有 Z 到 Y 的链

$$Z—B_n—\cdots—B_1—A_m—\cdots—A_k—Y \quad ④$$

与 X 到 Y 的链 ① 即

$$X—A_1—\cdots—A_m—\cdots—A_k—Y$$

比较,它和 ③ 不同的只是从 A_m 以后改成 ②,和 ④ 不同的只是从 A_m 以前改成倒过来的 ②,由于 ① 是最长的链,其中 A_m 到两端的距离都不超过 11,所以 ② 的长即 A_m 到 Z 的距离也不超过 11,因此,如果将某一消息告诉 A_m,那么至迟经过 10 天,这一消息便为全区居民所知晓了.

再设 $k \geqslant 20$,这时取 A_{10} 作为上述的 A_m,并且把消息告诉他,按上面的论证,A_{10} 到其他居民 Z 的链,只要是不经过 A_{11} 的,它的长不超过 11,因此,至迟经过 10 天,所有这样的 Z 就都知道消息了,现在把这些 Z(至少包括 X,$A_1 \cdots A_9$)和 A_{10} 分离出来,剩下的居民至多只有 $1\,000 - 11$ 人,原来由 A_{10} 到剩下的每个居民的熟人链都经过 A_{11},但不再经过被分出的任何居民,因为由 A_{10} 到分出的每个居民已经有不经过 A_{11} 的链,不可能再有经过 A_{11} 的链,这就是说,在剩下的居民中,由 A_{11} 到其他每个居民都有熟人链,从而把由 A_{11} 到任何两个居民的链在其共有的最后成员处连接起来,就是这两个居民之间的链,因此,剩下的居民仍可按上述方法处理.

上述方法每进行一次,就可以把消息告诉一个居民,使得在 10 天之内至少有 11 个人知道这个消息,由于 $1\,000 = 11 \times 89 + 21$,所以至多进行 $89 + 1$ 次,就可以选出 90 个居民,同时告诉他们某一消息,使得经过 10 天这一消息便为全区居民所知晓.