❖再摆一张

在 6×6 棋盘上摆好了一些多米诺骨牌，每张骨牌覆盖两个相邻方格. 证明：如果棋盘上至少还有 14 个方格未被骨牌覆盖，则至少还可以再摆上一张骨牌而不动其他摆好的骨牌.

证明 用反证法. 假定棋盘上不能再摆上一张骨牌，则棋盘上任意两个未被骨牌盖住的方格（下称空格）都不相邻. 棋盘下方 5×6 部分中所有空格的集合记作 A，棋盘上方 5×6 部分中所有骨牌的集合记作 B. 设空格 $a\in A$，则位于空格 a 的上方且与 a 相邻的方格 a' 必被某个骨牌 b 盖住，否则 a 与 a' 是相邻的空格，不可能. 令骨牌 b 是集合 A 到 B 的映射 φ 下空格 a 的像，即 $b=\varphi(a)$. 这样便建立映射 $\varphi:A\to B$. 对于另一个空格 $a^*\in A$，如果 $\varphi(a^*)=\varphi(a)$，则 a^* 与 a 是相邻的空格，不可能. 因此，φ 是单射，故 $|A|\leqslant|B|$. 由于棋盘上至少有 14 个空格，所以至多摆上了 $\dfrac{6\times6-14}{2}=11$ 张骨牌，即 $|B|\leqslant11$. 另一方面，由于两个空格不相邻，因此棋盘上方第一行上至多有 3 个空格，即棋盘下方 5×6 部分中至少有 11 个空格，即 $|A|\geqslant11$. 于是 $11\leqslant|A|\leqslant|B|\leqslant11$. 因此，$|A|=|B|=11$. 这表明，整个棋盘上恰好摆上了 11 张骨牌，而且都摆在上方 5×6 部分中. 换句话说，棋盘下方最后一行全是空格，与两个空格不相邻相矛盾.

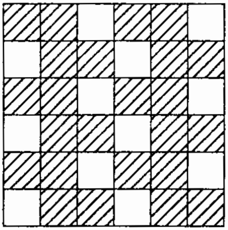

图 1

注 数字 14 不能再减少，由于一张骨牌覆盖两个相邻方格，所以棋盘上空格数应是偶数. 图 1 给出了恰有 12 个空格并且不能再摆上一张骨牌的一个例子.