❖特殊砝码

有 9 个砝码，质量分别为 1,2,4,8,16,32,64,128,256 g. 有一物体质量为

M g, M 为正整数. 由于可以用多种砝码的组合来量出该物体的质量.

(1) 试证: 没有任何物体可以用多于 89 种不同砝码的组合方式称出质量;

(2) 试求出质量 M, 使得质量为 M 的物体可以用 89 种不同砝码的组合方式称出来.

解 注意到用天平称量物体有两种办法: 一种是将物体放在天平左边, 砝码放在天平右边; 还有一种方法是将砝码放在天平右边, 但其总质量超过物体质量, 于是在物体所在的称盘上再加上砝码使其达到平衡, 作一个减法便算出物体质量.

给定砝码 $2^0, 2^1, \cdots, 2^k$ g, 一物体质量为 m g. 若用 $2^0, 2^1, \cdots, 2^k$ g 的砝码中的若干个在天平上称出质量为 m g 的物体. 达到同一目的的不同砝码选取个数记作 $f_k(m)$. 于是 $f_0(1) = 1$. 今设 $k \geqslant 1$. 由于

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^k = \frac{2^{k+1} - 1}{2 - 1} = 2^{k+1} - 1 < 2^{k+1}$$

所以当物体质量不小于 2^{k+1}g 时称不出物体质量. 因此我们约定

$$f_k(m) = 0, m \geqslant 2^{k+1}$$

另一方面, 引进 Fibonacci 序列

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geqslant 3, F_1 = 1, F_2 = 2$$

于是有

$$F_0 = 1, F_1 = 2, F_2 = 3, F_3 = 5, F_4 = 8$$

$$F_5 = 13, F_6 = 21, F_7 = 34, F_8 = 55, F_9 = 89$$

今 $f_0(1) = 1 = F_0, f_1(1) = 2 = F_1$

(1) 我们来证: 对任意 m, 有

$$f_k(m) \leqslant F_k$$

为此对 k 用归纳法. 今 $f_0(m) = 0, m > 1, f_0(1) = 1$. 所以 $f_0(m) \leqslant F_0$. 设 $f_k(m) \leqslant F_k$. 今

$$f_{k+1}(m) = f_k(m) + f_{k-1}(2^k - m) \leqslant F_k + F_{k-1} = F_{k+1}$$

当 $1 \leqslant m < 2^k$ 成立.

$$f_{k+1}(m) = f_{k+1}(2^k + t) = f_{k-1}(t) + f_k[2^{k+1} - (2^k + t)] \leqslant$$

$$F_{k-1} + F_k = F_{k+1}$$

其中, $2^k + 1 \leqslant m < 2^{k+1}$. 当 $2^{k+1} + 1 \leqslant m < 2^{k+2}$, 有

$$f_{k+1}(2^{k+1} + t) = f_k(t) \leqslant F_k < F_k + F_{k-1} = F_{k+1}$$

总之, 证明了在各种情形(包括 $m = 2^k, 2^{k+1}$), 都有

$$f_{k+1}(m) \leqslant F_{k+1}$$

由归纳法便证明了 $f_k(m) \leqslant F_k$. 这证明了

$$f_9(m) \leqslant F_9 = 89$$

对物体质量 m 有 $1 \leqslant m \leqslant 2^{k+1}-1$ 时,注意到质量 m 为自然数,我们分为下面若干段

$$1 \leqslant m < 2^{k-1}, m = 2^{k-1}, 2^{k-1}+1 \leqslant m < 2^k$$
$$m = 2^k, 2^k+1 \leqslant m < 2^{k+1}-1$$

相应有

$$f_k(t) = f_{k-1}(t) + f_{k-1}(2^k - t), 1 \leqslant t < 2^{k-1} \qquad ①$$
$$f_k(2^{k-1}) = 1 + 1 \qquad ②$$
$$f_k(2^{k-1}+t) = f_{k-1}(2^{k-1}+t) + f_{k-1}[2^k - (2^{k-1}+t)], 1 \leqslant t < 2^{k-1} \qquad ③$$
$$f_k(2^k) = 0 + 1 \qquad ④$$
$$f_k(2^k+t) = f_{k-1}(t), 1 \leqslant t < 2^k \qquad ⑤$$

式 ① 成立的原因在于 $f_{k-1}(t)$ 为不用质量为 2^k g 的砝码,而

$$f_{k-1}[2^k - (2^{k-1}+t)]$$

是天平右边放上 2^kg 的砝码,再在左边放上 $2^0, 2^1, \cdots, 2^{k-1}$g 的一些砝码使得天平平衡.所以我们很容易得到式 ① ~ ⑤.这里每个式子的右边中前一项表示不用 2^kg 的砝码,后一项表示天平一边只用 2^kg 的砝码.现在设 $k \geqslant 2$,则由式 ③ 及式 ⑤,当 $1 \leqslant t < 2^{k-1}$,有

$$f_k(2^{k-1}+t) = f_{k-1}(2^{k-1}+t) + f_{k-1}[2^k - (2^{k-1}+t)] =$$
$$f_{k-2}(t) + f_{k-1}[2^k - (2^{k-1}+t)]$$
$$f_k(t) = f_{k-1}(t) + f_{k-1}(2^k - t) =$$
$$f_{k-1}(t) + f_{k-1}[2^{k-1} + (2^{k-1} - t)] =$$
$$f_{k-1}(t) + f_{k-2}(2^{k-1} - t)$$

所以用 9 个质量为 $2^0, 2^1, \cdots, 2^8$g 砝码来称物体,不同砝码的组合至多有 89 种.

(2) 下面来讨论质量为多少的物体恰好有 89 种不同组合的方式来称出.令 $f_0(1) = F_0, f_1(1) = F_1$.而

$$f_k(2^{k-1}+t) = f_{k-2}(t) + f_{k-1}[2^k - (2^{k-1}+t)], 1 \leqslant t < 2^{k-1}$$

于是

$$f_2(3) = f_2(2^{2-1}+1) = f_0(1) + f_1(2^{2-1}-1) =$$
$$f_0(1) + f_1(1) = F_0 + F_1 = F_2$$
$$f_3(5) = f_3(2^{3-1}+1) = f_1(1) + f_2(2^{3-1}-1) =$$
$$f_1(1) + f_2(3) = F_1 + F_2 = F_3$$
$$f_4(11) = f_4(2^{4-1}+3) = f_2(3) + f_3(2^{4-1}-3) =$$

$$f_2(3)+f_3(5)=F_2+F_3=F_4$$

$$f_5(21)=f_5(2^{5-1}+5)=f_3(5)+f_4(2^{5-1}-5)=$$

$$f_3(5)+f_4(11)=F_3+F_4=F_5$$

$$f_6(43)=f_6(2^{6-1}+11)=f_4(11)+f_5(2^{6-1}-11)=$$

$$f_4(11)+f_5(21)=F_4+F_5=F_6$$

$$f_7(85)=f_7(2^{7-1}+21)=f_5(21)+f_6(2^{7-1}-21)=$$

$$f_5(21)+f_6(43)=F_5+F_6=F_7$$

$$f_8(171)=f_8(2^{8-1}+43)=f_6(43)+f_7(2^{8-1}-43)=$$

$$f_6(43)+f_7(85)=F_6+F_7=F_8$$

$$f_9(341)=f_9(2^{9-1}+85)=f_7(85)+f_8(2^{9-1}-85)=$$

$$f_7(85)+f_8(171)=F_7+F_8=F_9=89$$

至此算出

$$f_9(341)=f_9(2^8+85)=89$$

另一方面,由于当

$$1\leqslant t\leqslant 2^{k-1}$$

有

$$f_k(t)=f_{k-1}(t)+f_{k-2}(2^{k-1}-t)$$

所以

$$f_9(171)=f_8(171)+f_7(85)=F_7+F_8=F_9=89$$

至此证明了当物体质量为 171 g 及 341 g 时,恰好有 89 种不同的砝码组合方法,称出该物体的质量.