## ❖跳石子游戏

我们将 62 粒石子放到一个普通的 $8\times8$ 棋盘上，每一格放一块而对角上的两个小格空着. 现在我们按如下规则往下拣石子，一次跳过两格，把跳过的两格中的石子拣去. 因而如果我有

| • | • | • | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |

我们可以把 $a$ 格中的石子跳到 $d$ 拣去 $b$ 和 $c$ 格中的石子,变成

| | | | • |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |

我们可以在棋盘上横跳竖跳,但不能斜跳.

证明:如果我们一直跳到只剩下两块石子,它们必在相同颜色的格子内.

**证明** 在游戏的任一时刻,设变量 $R$ 表示红格中的石子数,设 $B$ 表示黑格中的石子数,我们不妨假定开始时角上两个没有石子的格子都是红色的,所以开始时 $B = 32, R = 30$,在游戏进行过程中,我们始终跟踪量 $B - R$.

跳一次拣去的两块石头,一块是红格中的,一块是黑格中的,而跳的一块石头从黑格跳到了红格中或从红格跳到黑格中,于是每跳一次 $R$ 或 $B$ 中有一个不变而另一个减少 2. 所以,每跳一次,$B - R$ 或者增加 2 或者减少 2.

现在 $B - R$ 在开始时的值为 2,所以跳过一次它可以被 4 整除,而跳二次后,它又不能被 4 整除了,在跳了第三次以后,$B - R$ 再次能被 4 整除,然后在第四次跳以后再不能被 4 整除. 如此继续下去. 我们看到在任意偶数次跳以后,$B - R$ 都不能被 4 整除.

如果最后剩下两块石头,这时必刚好跳过 30 次,所以 $B - R$ 不能被 4 整除. 特别是我们最后不可能有 $B - R = 0$. 因而最后的两块石子必在相同颜色的格子中.