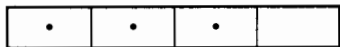
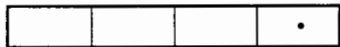


❖ 跳石子游戏

我们将 62 粒石子放到一个普通的 8×8 棋盘上, 每一格放一块而对角上的两个小格空着. 现在我们按如下规则往下拣石子, 一次跳过两格, 把跳过的两格中的石子拣去. 因而如果我有



我们可以把 a 格中的石子跳到 d 拣去 b 和 c 格中的石子, 变成



我们可以在棋盘上横跳竖跳, 但不能斜跳.

证明: 如果我们一直跳到只剩下两块石子, 它们必在相同颜色的格子内.

证明 在游戏的任一时刻, 设变量 R 表示红格中的石子数, 设 B 表示黑格中的石子数, 我们不妨假定开始时角上两个没有石子的格子都是红色的, 所以开始时 $B = 32, R = 30$, 在游戏进行过程中, 我们始终跟踪量 $B - R$.

跳一次拣去的两块石头, 一块是红格中的, 一块是黑格中的, 而跳的一块石头从黑格跳到了红格中或从红格跳到黑格中, 于是每跳一次 R 或 B 中有一个不变而另一个减少 2. 所以, 每跳一次, $B - R$ 或者增加 2 或者减少 2.

现在 $B - R$ 在开始时的值为 2, 所以跳过一次它可以被 4 整除, 而跳二次后, 它又不能被 4 整除了, 在跳了第三次以后, $B - R$ 再次能被 4 整除, 然后在第四次跳以后再不能被 4 整除. 如此继续下去. 我们看到在任意偶数次跳以后, $B - R$ 都不能被 4 整除.

如果最后剩下两块石头, 这时必刚好跳过 30 次, 所以 $B - R$ 不能被 4 整除. 特别是我们最后不可能有 $B - R = 0$. 因而最后的两块石子必在相同颜色的格子中.