❖异色正方体

设有足够多的单位正方体,某些是黑色的,另一些是白色的.考察由 n^3 个单位正方体砌成的 $n \times n \times n$ 正方体.如果规定每一个单位正方体恰与三个异色的单位正方体有公共面,那么对怎样的 n,上述 $n \times n \times n$ 正方体可以砌成?

解 针对题中所述的由染色单位正方体砌成的 $n \times n \times n$ 正方体,我们构作一个有 n^3 个顶点的图.每个顶点代表一个染色的单位正方体.每条边所连接的顶点代表两个有公共面的异色正方体.如果 n 是奇数,那么 n^3 个顶点的图不可能每个顶点的度数都等于3.题目所要求的 $n \times n \times n$ 正方体不可能砌成.

下面指出 $n = 2k$ 是所要求的 $n \times n \times n$ 正方体可以砌成的必要充分条件.对于 $k = 1$,我们有 $2 \times 2 \times 2$ 正方体.对于 $k > 1$, $n = 2k$,我们用 k^3 个上面 $k = 1$ 的情形所示的 $2 \times 2 \times 2$ 基本正方体拼成 $n \times n \times n$ 正方体,每两个基本正方体拼合时,将同样颜色的方格面相对接.这样拼成的 $n \times n \times n$ 正方体显然符合要求.综上所述可以判定:当且仅当 n 是偶数时,题目所述的要求可实现.