❖最重砝码

设有 20 个砝码，它们可以用天平来称质量为 $m = 1, 2, \cdots, 1\,997$ g 的物体. 试求最重砝码的最小可能值.

(1) 如果砝码全是整数;

(2) 如果砝码不全是整数.

解 (1) 为了找 20 个砝码来称质量为 $1, 2, \cdots, 1\,997$ g 的物体，我们取 n 个砝码，质量依次为 $1, 2, \cdots, 2^{n-1}$ g. 所以由 $1 + 2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ 可知 $1, 2, \cdots, 2^n - 1$ 可用这 n 个砝码称出. 我们取 $1 \leqslant n \leqslant 20$，余下 $20 - n$ 个砝码，我们取它们质量相同，记作 m. 且这 20 个砝码可称出质量为 $1, 2, \cdots, 1\,997$ g 的物体. 为此我们要求

$$(20 - n)m + 2^n - 1 \geqslant 1\,997$$

且

$$2^{n-1} \leqslant m \leqslant 2^n - 1$$

显然这样一来,必可称出质量为 1,2,…,1 997 g 的物体. 由题目要求,我们还要求 m 最小. 因此,上述三条件可变为

ⅰ 当(20 - n) 除不尽(1 998 - 2^n)

$$2^n - 1 \geqslant m = \left[\frac{1\,998 - 2^n}{20 - n}\right] + 1 \geqslant 2^{n-1}$$

ⅱ 当(20 - n) 除尽(1 998 - 2^n)

$$2^n - 1 \geqslant m = \left[\frac{1\,998 - 2^n}{20 - n}\right] \geqslant 2^{n-1}$$

由

$$2^n - 1 \geqslant \frac{1\,998 - 2^n}{20 - n}$$

有

$$2^n \geqslant \frac{2\,018 - n}{21 - n} = 1 + \frac{1\,997}{21 - n}, 1 \leqslant n \leqslant 20$$

由

$$2^n - 1 \geqslant \left[\frac{1\,998 - 2^n}{20 - n}\right]$$

有

$$(21 - n)(2^n - 1) \geqslant 1\,997$$

所以 $n = 8, \cdots, 20$. 为了$\left[\frac{1\,998 - 2^n}{20 - n}\right]$取最小,我们自然地取 $n = 8$,于是

$$\frac{1\,998 - 2^n}{20 - n} > \left[\frac{1\,998 - 2^n}{20 - n}\right] = 145$$

所以取 8 个砝码,质量分别为 $2^0, 2^1, \cdots, 2^7$ g,另取 12 个砝码,质量都是 146 g,则题目所求之数为 146.

(2) 同(1). 有

$$\frac{1\,998 - 2^8}{20 - 8} = \frac{1\,742}{12} = 145\frac{1}{6}$$

我们取 8 个砝码,质量依次为 $1, 2, 2^2, \cdots, 2^7$ g,于是可称出质量为 1,2,…,255 g 的物体. 如果有砝码质量为 $145\frac{1}{6}$ g,则必须有 6 块相同质量的砝码,且同时用. 而 $6 \times 145\frac{1}{6} = 871$. 20 块砝码,余下 6 块质量不能再取 $145\frac{1}{6}$. 因为那样称不出 256. 若余下 6 块质量为 145 g,则由 $255 + 6 \times 145 = 255 + 870 = 1\,125$, $1, 2 \cdots, 2^7$ 及 6 块重 145 g 的砝码可称出质量为 1,…,1 125 g 的物体. 将 6 块质量为 145 g 的砝码改为 6 块质量为 $145\frac{1}{6}$ g 的砝码,便称出 1 126 g 的物体. 今由

$$6 \times 145\frac{1}{6} = 871, 6 \times 145\frac{1}{6} + 145 = 1\ 016$$

所以每次都用 6 块 $145\frac{1}{6}$ g 的砝码加上 1 块 145 g 的砝码，可称到质量为 871 + 145 + 255 = 1 271 g 的物体. 再每次都用 6 块 $145\frac{1}{6}$ g 的砝码加上两块 145 g 的砝码，于是可称到质量为 1 271 + 145 = 1 416 g 的物体. 这样依次下去，便称到 1 997. 所以所求之数为 $145\frac{1}{6}$.