❖罐头称重

一队地质学家在野外考察，带着 80 听罐头. 这 80 听罐头有不同的质量，这些质量是已知的，并列在一张表上. 过了不久，这些罐头的名称已辨认不清了. 厨师知道每听罐头里的内容，并且声称他可以认出它们，并不需要打开任何一听罐头，只需使用那张表和一架天平，只要把对象放在天平的两边，这天平可以区别对象的轻重.

证明：为了做到这一点，

(1) 称四次便足够了；

(2) 称三次则不行.

解 (1) 每听罐头均表示为三进制的 4 位数，这些数从 0000 到 2222. 在第 i 次称重中，把第 i 位上出现数字 0 的所有罐头放在一个盘中，且把第 i 位上出现 2 的所有罐头放在另一盘中，$1 \leqslant i \leqslant 4$. 因此，在每一次称重中，在每一盘上都有 27 听罐头.

在第一次称重时，我们得到由 27 听罐头中任何两个子集质量之差的最大值. 因此，第一个数字是正确的.

在第二次称重时，我们得到 27 听罐头中任何两个子集的质量之差的最大值，那些子集合由 9 听罐头所组成，它们的三进制表示中由 0，1 和 2 开始. 因此，第二位数字也是正确的.

在第三次称重时，我们得到 27 听罐头中任何两个子集的质量之差的最大值，那些子集合由 3 听罐头组成，它们的三进制表示中，开头的两位数是 00，01，02，10，11，12，20，21 和 22. 因此，第三位数字也是正确的.

在第四次称重时，我们得到 27 听罐头中任何两个子集的质量之差的最大值，在这些子集合中，同一个子集合的任何两个的三进位表示中的前三位不完全一样. 这就证明了厨师没有说错.

(2) 在一次称量中，我们只能区分出一听罐头，它在一只盘中，或在另一只盘中，或者根本不在二者之中. 因此，我们可以把罐头区分为三个子集合. 通过三次称重，我们可以得到 27 个子集合. 因此我们有多于 27 听的罐头，至少有一个子集合至少有两听罐头. 不可能证明在这两听罐头上的数字没有被颠倒过.