

❖ 热线电话

50 位不同学校的校长与 50 位副校长有电话联系,而且每一位校长与 13 位副校长有电话联系,每一位副校长与 13 位校长有电话联系.试证:能够拆除 600 条电话线,使得每一位校长与一位副校长联系,而每位副校长与一位校长联系.

证明 为了解本题,显然只需要建立每一位校长与一位副校长的对应关系,使得他们有电话联系,保留处于上述对应关系的 50 对校长与副校长的电话线,并且拆除余下的 $13 \times 50 - 50 = 600$ 条电话线,命题就可得证.

设 A 为某一个校长集合,这个集合与某一个副校长集合 B 建立了一一对应关系 $b = g(a)$,并且对任意 $a \in A$ 的校长 a 与副校长 $g(a)$ 有电话线,现在证

明,集合 A 与 B 总是能够这样扩大,使得新的集合间存在适当的一一对应关系,为此,我们以 A' 表示 A 的补充,以 B' 表示 B 的补充,如果 A' 与 B' 即使只有一条电话线,那么 A' 与 B' 中与这条线有关的成员能补入 A 和 B' ,此时得到所要求的扩大,因此可以认为, A' 仅与 B 有联系,而 B' 仅与 A 有联系,设 A_1 是 A 中与 B' 的某些成员有联系的

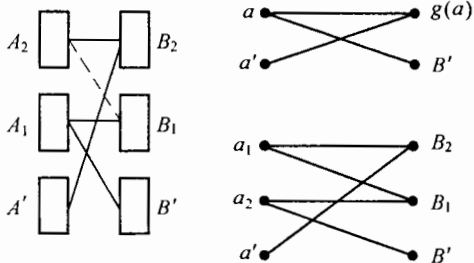


图 1

成员的集合, $B_1 = \{g(a), a \in A_1\}$, B_2 为 B 中与 A' 有联系的成员的集合,而 A_2 为 A 中与 B_2 的成员建立了一一对应关系的成员的集合(图 1). 假定 $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. 如果 $a \in A_1 \cap A_2$,那么 a 与某人 $b' \in B'$ 有联系,而 $g(a)$ 与某个 $a' \in A'$ 有联系(参阅图 1). 在这种情形下,集合 A 能补充成员 a' ,把它与 $g(a)$ 对应,而把成员 a 与 b' 对应,显然在这种情况下可以得到 A 的合适的扩大.

也就是说,可以认为 $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. 此时同样有 $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ (A 与 B 的成员彼此是一一对应地联系的),可以看出,集合 B_1 与 A_2 应当至少有一条电话联系着,事实上,集合 A_1 与 B_1 有同样多个成员,它们建立了一一对应关系,因此从 A_1 与 B_1 引出同样多条电话线(每一成员引出 13 条),从 A_1 引出的部分电话线根据定义到达 B' ,这就是说,同样多条电话线从 B_1 走向 A_2 (因为正如上面已证明的, B_1 与 A' 没有联系),这样,存在 $b_1 \in B_1$ 和 $a_2 \in A_2$,它们彼此有联系,于是,根据集合 A_1 与 B_1 的定义,可找到这样一些, $b_2 \in A_2$ 和 $a' \in A'$, $a_1 \in A'$ 和 $b' \in B'$,使得 a_2 与 b_2 , b_2 与 a' , b_1 与 a_1' , a_1 与 b' , 分别都有电话联系,把成员 a' 补入集合 A , b' 补入集合 B ,使成员 b_1 对应于 a_2 , b' 对应于 a_1 , b_2 对应于 a' ,对于 A 与 B 的所有其他成员保留原先的对应关系,显然,新集合 $A \cup \{a'\}$ 和 $B \cup \{b'\}$ 中任意一对处于对应关系的成员都有电话联系.

由此得出,对任何一个校长集合能这样地补充,使得新的集合中任何一位校长对应一位且仅对应一位副校长,从只含一位校长的集合 A 开始,使用 49 次上面描述的方法,可以得到所要求的 50 位校长与 50 位副校长之间的一一对应关系,如上所证,在具有这种对应之下可以拆掉 600 条电话线,保留每一位校长与一位副校长的电话线.