

❖ 舞蹈训练班

在一个舞蹈训练班里,15个男孩和15个女孩相对站成两排,形成15对.已知每对男女的身高相差不超过10 cm.现在让这些男孩和女孩分别按照从高到矮的次序站成两排,重新形成15对.证明:这15对男女的身高同样相差不超过10 cm.

证明 设 $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_{15}$ 为15个男孩的身高, $g_1 \geq g_2 \geq \cdots \geq g_{15}$ 为15个女孩的身高.假设存在某个 $k \in \{1, \cdots, 15\}$,使得 $|b_k - g_k| > 10$.不妨假设 $g_k - b_k > 10$,则对任意 $i \in \{1, \cdots, k\}$ 和 $j \in \{k, \cdots, 15\}$,均有 $g_i - b_j > 10$.考虑身高为 $b_j, j \in \{k, \cdots, 15\}$ 的男孩和身高为 $g_i, i \in \{1, \cdots, k\}$ 的女孩.由抽屉原理,这16个男女中至少有2人是原来的一对,而他们的身高相差超过10 cm,与题设矛盾.