

## ❖ 相识为偶

求证:在由 50 个人组成的群体中,总存在两个人,他们都认识的人的个数是一偶数(可能是零).

**证明** 我们用图来做模型,用顶点来代表人,用边来代表他们的“认识度”.具有长度 2 的任何道路称为一个“链”.用反证法.设每两个顶点被奇数条长度为 2 的道路连接起来.考虑一个特殊的顶点  $p$ ,把剩下的顶点分成相邻的点的集合  $A$  和不相邻的点的集合  $N$ .每一点  $a \in A$  只通过集合  $A$  中另外的顶点被连接到  $a$ .因此,它在集合  $A$  中必有奇数度,由此得知集合  $A$  中有偶数个顶点.因此  $p$  有偶数度,其他的顶点也是如此,因为其他顶点也能起到  $p$  的作用.由此得知,集合  $A$  中的任何点  $a$  能同集合  $N$  中的偶数个顶点连起来,因此集合  $A$  与集合  $N$  之间边的总数是偶数.

集合  $N$  中的每一点  $n$  仅仅能被集合  $A$  中的顶点同  $p$  连接起来.因此,它可同它们中的奇数个点连起来.这说明集合  $N$  也有偶数个顶点,因此顶点的整数是奇数.

若图有 50 个顶点,其中必有两个,它们可被偶数条“链”连接起来.