❖要试多少次

一个保险柜上的锁由三个旋钮组成，每个旋钮有 8 种不同的位置，由于保险柜构造上的缺点，三个旋钮中只要有两个在正确位置，柜门即被打开，问至少尝试多少次组合，才能保证门一定被打开(假定不知道正确的组合)?

解 设每个旋钮的位置为 1,2,…,8. 每种组合可记为

$$(a,b,c),1 \leqslant a \leqslant 8,1 \leqslant b \leqslant 8,1 \leqslant c \leqslant 8$$

试 32 次即可保证将这个保险柜打开，事实上，32 种组合为

$$\begin{array}{llll}
(1,1,1), & (2,1,2), & (3,1,3), & (4,1,4) \\
(1,2,4), & (2,2,1), & (3,2,2), & (4,2,3) \\
(1,3,3), & (2,3,4), & (3,3,1), & (4,3,2) \\
(1,4,2), & (2,4,3), & (3,4,4), & (4,4,1) \\
(5,5,5), & (6,5,6), & (7,5,7), & (8,5,8) \\
(5,6,8), & (6,6,5), & (7,6,6), & (8,6,7) \\
(5,7,7), & (6,7,8), & (7,7,5), & (8,7,6) \\
(5,8,6), & (6,8,7), & (7,8,8), & (8,8,5)
\end{array}$$

不妨假定三个旋钮中，有两个的正确位置是在前 4 种(1,2,3,4) 中，而第一个与第二个旋钮的每一种组合(a,b),$1 \leqslant a,b \leqslant 4$,均在上面列出的前 16 个三元组合中出现. 第一个与第三个旋钮的组合(a,c),$1 \leqslant a,c \leqslant 4$;第二个与第三个旋钮的组合$(b,c)$,$1 \leqslant b,c \leqslant 4$,也都是这样，所以经过这 32 次检验，柜门一定能

打开.

另一方面,任何 31 种三元组合,不能保证把柜打开,证明如下.

设 K 为这 31 种三元组合所成的集,如果两种组合至少有两个位置相同,我们就说一种组合覆盖了另一种,只有在每种三元组合都被 K 中某种组合覆盖时,才能保证柜门一定打开.否则,那个由三个正确位置组成的组合,没有被 K 覆盖时,柜门就不能打开.而每一次失败的试验,只能表明一种组合及被它覆盖的组合都应当摒弃,对那些未被覆盖的组合则不能提供丝毫有用的信息.

如果把每种三元组合作为三维空间的点,那么全部的 8^3 种三元组合就是构成一个立方体的全部整点 (a,b,c), $1 \leqslant a,b,c \leqslant 8$.每一个整点(三元数组)覆盖与它在同一横线或纵线上的 21 个整点(连同本身在内共 22 个),并且只覆盖这些整点,我们要证明任何 31 个整点不能覆盖全部的 8^3 个整点.

首先在八个平面 $z = c, c = 1,2,\cdots,8$ 中必有一个至多含 3 个属于 K 的点(因为 $|K| = 31$),不妨设 $z = 1$ 上至多有 3 个点属于 K,过这些点的(平面 $z = 1$ 上的)坐标线至多 6 条(三横三纵),因而至多覆盖这平面上

$$6 \times 8 - 3 \times 3 = 39$$

个整点(包括 K 中那小于等于 3 个点在内),至少有 $64 - 39 = 25$ 个点未被覆盖,不妨设这 25 个点为

$$(a,b,1), 4 \leqslant a,b \leqslant 8 \tag{①}$$

于是 K 中至少有 25 个点在集(长方体)

$$M = \{(a,b,c), 4 \leqslant a,b \leqslant 8, 1 \leqslant c \leqslant 8\} \tag{②}$$

中(因为在 $c \neq 1$ 时,M 中每个点只能覆盖 ① 中一个点,即 ① 中只有一个点在它的"正下方").

集 M 中的点不能覆盖集(长方体)

$$L = \{(a,b,c), 1 \leqslant a,b \leqslant 3, 1 \leqslant c \leqslant 8\} \tag{③}$$

中的点,所以 L 中的点只能靠

$$K - M = K_1$$

中的点来覆盖,但

$$|K_1| \leqslant 31 - 25 = 6$$

所以在 8 个平面 $z = c, 1 \leqslant c \leqslant 8$ 中至少有一个平面上没有 K_1 的点,设平面 $z = 8$ 上没有 K_1 的点,则 K_1 中每个点至多覆盖集(正方形)

$$L_8 = \{(a,b,8), 1 \leqslant a,b \leqslant 3\}$$

中一个点,由于

$$|L_8| = 9 > |K_1|$$

所以 L_8 上的点不能全被 K_1 覆盖,从而也不能全被 K 覆盖.

所以,至少要试验 32 种组合,才能保证将柜门打开(前面列出 32 种组合是分别在 $8 \times 8 \times 8$ 的立方体的左下角与右上角的两个 $4 \times 4 \times 4$ 的小立方体中).