

❖ 在哪登陆

船上的一个人到海岸上最近的点 S 的距离为 b km, 点 S 沿海岸线到他住的地方点 H 的距离为 a km. 如果这个人以 r km/h 匀速划行和以较快的速度 ω 步行, 为了用最短的时间到家, 他应该在 S 和 H 之间哪点 L 着陆.

解 如图 1, 设 α 表示这个人的划行路线与到岸边点 S 的连线的夹角. 定义 $\varphi = \tan^{-1} \frac{a}{b}$. 如果

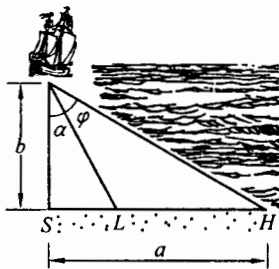


图 1

$T(\alpha)$ 表示他行程所花费的时间总数. 那么

$$T(\alpha) = \frac{b \cdot \sec\alpha}{r} + \frac{a - b \cdot \tan\alpha}{\omega} \quad (1)$$

注意, $b \cdot \sec\alpha$ 和 $a - b \cdot \tan\alpha$ 都假设是非负的, 因为它们都表示距离. 因此, 我们要求 $0 \leq \alpha \leq \varphi$.

首先我们把 (1) 改写为

$$T(\alpha) = \frac{a}{\omega} + \frac{b}{r\omega} (\omega \cdot \sec\alpha - r \cdot \tan\alpha) \quad (2)$$

根据对函数的了解, 我们想到式子 $\omega \cdot \sec\alpha - r \cdot \tan\alpha$ 可以用一个直角三角形表示出来, ω 为斜边, r 为对锐角 θ 的腰, 从而, 式 (2) 可改写为

$$T(\alpha) = \frac{a}{\omega} + \frac{b}{r\omega} \sqrt{\omega^2 - r^2} \left(\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - r^2}} \sec\alpha - \frac{r}{\sqrt{\omega^2 - r^2}} \tan\alpha \right) \quad (3)$$

或者

$$T(\alpha) = \frac{a}{\omega} + c(\sec\theta \cdot \sec\alpha - \tan\theta \cdot \tan\alpha) \quad (4)$$

其中, $c = \frac{b}{r\omega} \sqrt{\omega^2 - r^2}$.

于是, 为把 $T(\alpha)$ 减为最小, 我们必须把 $\sec\theta \cdot \sec\alpha - \tan\theta \cdot \tan\alpha$ 减为最小, 注意到

$$\begin{aligned} \sec\theta \cdot \sec\alpha - \tan\theta \cdot \tan\alpha &= 1 + \sec\theta \cdot \sec\alpha - 1 - \tan\theta \cdot \tan\alpha = \\ &= 1 + \sec\theta \cdot \sec\alpha(1 - \cos\theta \cdot \cos\alpha - \sin\theta \cdot \sin\alpha) = \\ &= 1 + \sec\theta \cdot \sec\alpha[1 - \cos(\theta - \alpha)] \end{aligned}$$

因此, (4) 变成

$$T(\alpha) = \frac{a}{\omega} + c\{1 + \sec\theta \cdot \sec\alpha[1 - \cos(\theta - \alpha)]\} \quad (5)$$

最后, 因为对我们的 α 和 θ , $\sec\theta \cdot \sec\alpha[1 - \cos(\theta - \alpha)] \geq 0$, 我们看到, 对于在 0 和 $\varphi = \tan^{-1} \frac{a}{b}$ 之间的所有 α , 都有

$$T(\alpha) \geq \frac{a}{\omega} + c$$

而且, 如果 $0 < \theta < \varphi$, 那么, 当 $\alpha = \theta = \sin^{-1} \frac{r}{\omega}$ 时, $T(\alpha)$ 取最小值 $\frac{a}{\omega} + c$. 于是, 如果 $\theta < \varphi$, 即如果 $\sin^{-1} \frac{r}{\omega} < \tan^{-1} \frac{a}{b}$, 那么, 这个人应当在距离点 S 为 $b \cdot \tan\theta = br/\sqrt{\omega^2 - r^2}$ 的点 L 着陆. 如果 $\theta \geq \varphi$, 那么这个人应该在点 H 着陆.