❖颠倒卡片

给定由 n 张卡片组成的一个卡片叠.每次操作允许从叠中任选的某处抽出一组接连的卡片,然后保持该组卡片的原有次序(并且不翻转任何一张)将该组卡片插回到叠中另一任选的位置.要求经若干次允许范围内操作完全颠倒这叠卡片的排列顺序.

(1) 对于 $n=9$,试证:5 次操作可达到要求;

(2) 对于 $n=52$,试证:

ⅰ 可通过 27 次操作达到要求;

ⅱ 17 次操作不能达到要求;

ⅲ 26 次操作不能达到要求.

解 (1) 下表所示的 5 次操作可实现题目的要求.表中每行括号内的数码表示下次操作将取出另安插的卡片;每行的箭头号“↑”表示取出的卡片将要安插的位置.

初始态	1, ↑ ,2,3,4,5,(6,7),8,9
1 次操作后	1,6, ↑ ,7,2,3,4,(5,8),9
2 次操作后	1,6,5, ↑ ,8,7,2,3,(4,9)
3 次操作后	(1,6,5,4),9,8,7,2, ↑ ,3
4 次操作后	9,8,7,(2,1),6,5,4,3, ↑
终了态	9,8,7,6,5,4,3,2,1

(2) ⅰ 更一般地,设 $k\geqslant 2$,将证明对于 $n=2k$ 或 $n=2k+1$,进行 $k+1$ 次操作即可实现要求.

下面对 $n=2k+1$ 的叙述稍作修改也适用于 $n=2k$ 情形(对于 $n=2k$ 情

形，下面叙述中所涉及的 $2k+1$ 一律忽略不计）. 先将 $(k+2,k+3)$ 移至 1 与 2 之间. 然后将 $(k+1,k+4)$ 移至 $k+2$ 与 $k+3$ 之间. 将 $(k,k+5)$ 移至 $k+1$ 与 $k+4$ 之间，如此这般做下去，直到将 $(4,2k+1)$ 移至 5 与 $2k$ 之间. 经过这样的 $k-1$ 次操作之后得到

$$1,k+2,k+1,\cdots,4,2k+1,2k,\cdots,k+3,2,3$$

这之后的第 k 次操作将 $(1,k+2,k+1,\cdots,4)$ 移至 2 与 3 之间，第 $k+1$ 次操作将 $(2,1)$ 移至 3 之后. 经过这样的 $k+1$ 次操作达到要求. 对于 $n=52=2\times 26$，$k=26$，可经过 $k+1=27$ 次操作达到目的.

ⅱ 将证明对于 52 张卡片，17 次操作是不够的. 我们约定这样一个称呼：倘若两张相邻的卡片中前一张的数码比后一张的小，则称这两张卡片间有一个"升阶". 顺序排列的 52 张卡片，初始时有 51 个升阶. 每次操作时，抽出相继的任何一组卡片至多消去两个升阶，将这组卡片插入至多再消去一个升阶. 因此，每次操作至多消去三个升阶. 操作次数少于 $17=\frac{51}{3}$ 当然不能消去全部升阶. 即使 17 次操作也不行，因为可以断言：第一次操作至多消去一个升阶. 如果抽出的卡片在任何一端，那么上述断言显然成立. 如果抽出的卡片组在中间，那么抽出时消去了两个升阶，插入某处时又会产生一个升阶. 无论如何，第一次操作至多消去一个升阶.

ⅲ 将证明任何一次操作至多消去两个升阶，并且第一次和最后一次中的任何一次至多只能消去一个升阶.

假设某次操作消去了三个升阶，则该次操作抽出一组卡片时消去了两个升阶，将该组插入时又消去了一个升阶. 设 a 是抽出那组卡片前面紧邻那张卡片的号码，b 是抽出那组卡片第一张的号码，c 是抽出那组卡片最后一张的号码，d 是该组后面紧邻那张卡片的号码. 并设该组卡片经操作插入到号码为 e 和 f 的相邻卡片之间. 于是，一方面有 $a<b$，$c<d$，$d<a$，因而 $c<b$. 另一方面，应该有 $f>e$，$e>b$，$c>f$，因而 $c>b$. 这两方面的结论显然互相矛盾.

至于第一次操作，至多消去一个升阶. 至于最后一次操作，我们可以倒过来看操作手续，最后一次视为倒过来的第一次，至多将一个降阶换成升阶. 因此，原来的最后一次操作，至多将一个升阶换成降阶. 第一次和最后一次操作至多各消去一个升阶，其间进行的每次操作至多消去两个升阶. 52 张卡片的初始态有 51 个升阶，需要 25 次中间操作才能消去 $51-2=49$ 个升阶，因此总共需要 27 次操作.