❖运作实现

mn 个不同的物体排成一个 $m \times n$ 矩形阵列. 每次操作允许对任意选择的若干行进行行内置换(水平运作),或者对任意选择的若干列进行列内置换(竖直运作). 求最小的自然数 k 使得 mn 个物体在 $m \times n$ 阵列内的任意换位都可以通过不超过 k 次允许运作实现,并且必有某种换位不能通过少于 k 次允许运作实现(所谓"换位" 是指 mn 个物体重新放置成 $m \times n$ 阵列的任何一种情形).

解　舍去最平凡的情形,可设 $m, n \geqslant 2$. 下面的例子说明,为了实现某些换位,3 次操作是不可少的. 例如,在 $m \times n$ 方格阵列中,取出一个 2×2 方块,要

求实现如下的换位：一次水平运作之后，a 与 d 之中至少有一个离开本列，再来一次竖直运作也不能使 a 与 d 中的离开者回归本位，至少还需要进行一次操作．通过如下所示的 3 次操作，可以实现所要求的换位．

为了对一般情形证明 $k = 3$ 的充分性，先要证明两个引理．这两个引理所涉及的基本情况陈述如下：

基本假设　在 $m \times n$ 方格表中每格填写一个数，共填写了 n 个 1，n 个 2，……，n 个 $m-1$ 和 n 个 m．

引理 1　在基本假设的前提下，能够从每行选出一个代表方格，使得 m 个代表方格所填的数各不相同，$1,2,\cdots,m$ 这些数各有一个．

引理的证明　将对 r 用归纳法，证明这样的论断：可以从前 r 行中每行各选一格，使得所选各格填写的数不相同．对于 $r = 1$，结论显然成立．假设对于 $r = s$ 结论成立，考察 $r = s+1$ 的情形．我们先对其中的前 s 行运用归纳假设，将这 s 行所选的代表格填写的数的集合记为E_s．如果第 $s+1$ 行各格填写的数不全在 E_s 中，那么就取一个不属于 E_s 的数所在格作为第 $s+1$ 行的代表格．现在假定第 $s+1$ 行各格填写的数全在 E_s 之中．前 $s+1$ 行总共有 $(s+1)n$ 格，而填写 E_s 中 s 个不同数的格子至多只有 sn 个，所以在前 s 行中必有某行（设为第 q 行）有一格填写的数 $w \neq E_s$．将这填写 w 的格子改选为第 q 行的新的代表格．该行原代表格所填之数 v 必在第 $s+1$ 行某格出现，就选取这一格作为第 $s+1$ 行的代表格．

引理 2　在基本假设的前提下，可以通过水平运作使得每一列所填数的集合都是 $\{1,2,\cdots,m\}$．

回到原来的问题．下面证明对 $m \times n$ 阵列的任意换位，$k = 3$ 是充分的．为此，先给 $m \times n$ 表格的各小格标出放在该格的物体在换位中将达到的行数．然后通过水平运作达到引理2所述的状态——这是第一次操作．第二次操作是通过竖直运作将各格中的物体移到所要达到的行．第三次操作通过水平运作将各格中的物体移到所要达到的位置．