❖封闭公路

在某一国家有 1 000 条公路连接着 200 个城市，并且每一城市至少有一条公路通向外面，问在不破坏城市间交通联系的情况下，为了进行维修，最多能同时封闭几条公路？

解 以 M 表示这一国家所有城市的集合，我们称城市 m 与城市 n 相通，如果从 m 能够乘车到达 n，有可能通过其他城市，显然，此时也能从 n 乘车到达 m（可以坐相反方向的车）.

选取任一城市 $m_1 \in M$，设 M_1 为所有与 m_1 相通的城市的集合，而 N_1 是这些城市的数量（包括 m_1），显然，M_1 中任意两个城市相通（可以通过 m_1 来达到相通），一般地说，可能发生 M_1 与 M 不重合. 注意到，在这种情况集合 $M \setminus M_1$ 中任一城市没有公路与 M_1 中任一城市相连. 由此推出，该国的任一条公路或者连结 M_1 中两个城市，或者连结 $M \setminus M_1$ 中两个城市，现在证明，M_1 内部的公路中能够保留 $N_1 - 1$ 条公路，使得任意两个 M_1 中的城市依然相通，而余下的可全

部封闭修理，很清楚，此时 M 中任意两个城市间的联系没有被破坏，需知 $M \setminus M_1$ 内部一点也没有改变，而从 M_1 到 $M \setminus M_1$ 终归不能乘车到达，上面所指出的 $N_1 - 1$ 条公路可如下地逐次进行选取，设从 m_1 有一条公路通向 m_2. 此时，这一条公路保证了集合 $\{m_1, m_2\}$ 中完全联系，从集合 $\{m_1, m_2\}$ 能够到达 $M_1 \setminus \{m_1, m_2\}$ 中，因此能找到一条公路，它把 m_1 或 m_2 与 $M_1 \setminus \{m_1, m_2\}$ 中一个城市 m_3 连结起来，设对于某一 $i < N_1$，我们找到这样 $i - 1$ 条公路，使得沿着这些公路从集合 $\{m_1, \cdots, m_i\}$ 中任何一城市能够到达这一集合的任何另外一个城市，如前所指出的，由于集合 $\{m_1, \cdots, m_i\}$ 和 $M_1 \setminus \{m_1, \cdots, m_i\}$ 是相通的，所以能找到一条公路，它把城市 $m_1, \cdots, m_i$ 中一个与 $M_1 \setminus \{m_1, \cdots, m_i\}$ 中某一城市 m_{i+1} 连结起来. 把这条公路加进已知的 $i - 1$ 条公路，得到 i 条公路，沿着这 i 条公路集合 $\{m_1, \cdots, m_{i+1}\}$ 中任意两个城市相通，重复这种讨论，我们得到能保证集合 M_1 中 N_1 个城市间完全联系的 $N_1 - 1$ 条公路，去掉 M_1 内部余下的公路，我们没有破坏该国任何城市间的联系.

现在选取任何一个城市 $m_1' \in M \setminus M_1$，设 M_2 为与 m_1' 相通的城市的集合，而 N_2 为这些城市的数量(包括 m_1')，如前讨论一样，在不破坏 M_2 中(同样 M 中)任何两个城市间联系的情况下，连结 M_2 中各城市的公路只需保留 $N_2 - 1$ 条，重复必要次数的类似讨论，我们得到 k 个集合 $M_1, M_2, \cdots, M_k$ 及其相应的城市数 $N_1, \cdots, N_k$，其中每一集合保留的公路数比城市数少 1，而能使这些集合中的城市依然相通，同时，M_i 与 M_j 间的联系没有遭破坏，因为在修理前也不存在，由此得出，为了不破坏 M 中城市间的联系，能保留的公路总数为

$$(N_1 - 1) + \cdots + (N_k - 1) = N_1 + N_2 + \cdots + N_k - k = 200 - k$$

这里 k 为自然数，它依赖于所存在的公路网络结构，由上所述得出，为了维修最低限度能封闭

$$1\,000 - (200 - k) = 800 + k \geqslant 801$$

条公路，容易指出，在 $k = 1$ 情形，不能封闭更多的公路，事实上，$k = 1$ 时 $M = M_1$，即该国的任意两个城市相通，在这种情形，每一条余下的公路能保证的仅是与该国的一个新城市的联系，因此为保证 200 个城市间的相互联系需要不少于 199 条公路，由此可见，不能封闭多于 $1\,000 - 199 = 801$ 条公路.