❖不可再少

在棋盘上画直线，使得棋盘中每个方格，都有一条直线过其内点，试求最小直线数，这里棋盘为

(1) 3×3;

(2) 4×4.

试画出图来说明有这些直线就够了，且证明再少一根直线就不行了.

解 我们先来证明在 $m \times n$ 棋盘上，一条直线至多穿过 $n+m-1$ 个方格的内点. 事实上，棋盘中画出格子的水平线有 $m+1$ 条，垂直线有 $n+1$ 条. 这些线称为母线. 虽然一条平行于水平线的直线中可取 n 个不同方格的内点，平行于垂直线的直线中可取 m 个不同方格的内点，现在考虑斜线，它交母线至多 $n+1+m+1=n+m+2$ 条. 实际上，它至多只能和 $n+m$ 条母线相交，这是因为它和每个小方格至多交于两条边(如果它过一个小方格的顶点，实际上和两条边相交. 我们在计数时，只算它和一条边相交). 所以一条直线上至多有 $n+m-1$ 个不同方格的内点，这证明了断言.

(1) 当 $n = m = 3$. 由于每条直线至多有 $3 + 3 - 1 = 5$ 个不同方格中的内点,而总共有 $3^2 = 9$ 个不同方格,所以若有两条直线,它们包含了这 9 个不同方格的内点,再减少一条便不可能了.

(2) 当 $n = m = 4$. 由于每条直线至多有 $4 + 4 - 1 = 7$ 个不同方格中的内点,而总共有 $4^2 = 16$ 个不同方格,所以若有三条直线,它们包含了 16 个不同方格的内点,再减少一条便不可能了.