

❖ 靴子排列

设 30 只靴子任意排成一行,其中有 15 只左脚靴子和 15 只右脚靴子.证明:必定有接连排列的 10 只靴子,其中有 5 只左脚靴子和 5 只右脚靴子.

证明 将 30 只靴子依次编号.考察从 k 到 $k + 9$ 这 10 只靴子,约定将其中

的左脚靴子数减去右脚靴子数之差记为 D_k . 我们注意到: D_k 总是偶数, 并且 $D_{k+1} - D_k$ 只能取值 0 或者 ± 2 . 如果 $D_1 = 0$, 那么问题已解决. 不妨设 $D_1 \geq 2$. 因为

$$D_1 + D_{11} + D_{21} = 0$$

所以必有某个 $D_m \leq 0$. 不妨设 m 是满足上述要求的最小序号. 因为 $D_{m-1} \geq 2$, 并且不可能有 $D_m \leq -2$, 所以只能是 $D_m = 0$. 因此, 从 m 到 $m+9$ 这 10 只靴子中, 恰有 5 只左脚靴子和 5 只右脚靴子.