❖谁是赢家

设游戏者是一个女孩和一个男孩.他们在一块 $1 \times 1\ 000$ 的棋盘上玩游戏.有 n 枚铜钱,最初,铜钱都放在靠近棋盘的盒子里,游戏者轮流行动.由女孩开始动手,女孩可以从棋盘中或棋盘外选取 17 枚或更少的铜钱,然后可将它们放入棋盘上没被占用的格子,使得每一个格子中至多只有一枚铜钱.男孩可以从格子中取走任何多枚铜钱,只要它们是在连成一片的格子中,然后把铜钱放回盒子中.如果女孩能将所有 n 枚铜钱连成一片地放在棋盘的格子上,她就是赢家.

(1) 如果 $n=98$,女孩可以赢;

(2) 能使女孩赢的 n 的最大值是什么?

解 设游戏由女孩先开始动手.

(1) 女孩能建立起任何一个用 n 个或者更少数目的铜钱组成的图案,只要它不含有多于 16 枚铜钱连在一起的形状.因为她能重新恢复男孩所移走的,并且继续她的建造.这样,她可以有 12 块每块连续由 8 枚铜钱所组成,在相邻的两块之间,有一个格子的空隙.在她下一次移 动的时候,她可以把图案变为在两块 17 枚铜钱之间由 8 块 8 枚铜钱所组成.在下一步中,她必胜.

如果男孩移走一块由 8 枚组成的一片,女孩能将它补回去,并且从两边取 9 枚来补空隙.如果男孩取走 17 枚的一块,她总可以用 8 枚来填空,并且把余下的加到两端.如果男孩移走的是一块的一部分,在必要的时候,女孩可以移走余下的部分.

(2) 答案是98. 设想游戏做过一阵之后,还有多于98枚的铜钱. 设想女孩走过她的最后一步之后,棋盘上的图案是

$$a_1 - a_2 - \cdots - a_k$$

这里 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 为正整数,表示 a_1 枚铜钱占有连续的一片的格子,然后一个空格,接着是 a_2 枚铜钱占有连续的一片的格子,又是一个空格,如此等等.

如果女孩在她下一步动作时总能取胜. 为不失一般性,可设所有的铜钱均已在棋盘上. 于是 $a_1 \leqslant 17$,且 $a_k \leqslant 17$. 否则男孩从棋盘上取走多于 17 个的铜钱,这意味着在下一步动作时女孩不会得胜.

因为 $a_1 \leqslant 17$,且 $a_k \leqslant 17$,存在 i 满足 $1 < i < k$,且

$$a_i(k-2) \geqslant 99 - 17 - 17 = 65$$

因此

$$\frac{65}{k-2} + k - 1 \leqslant 17$$

因为女孩下一步得胜. 但是

$$\frac{65}{k-2} + k - 1 \geqslant 2\sqrt{65} + 1 > 17$$

得出矛盾.