

❖ 针刺方块

一个 $20 \times 20 \times 20$ 的立方体由 2 000 块 $2 \times 2 \times 1$ 大小的长方块所组成. 证明: 可以用一根针刺透这个立方体, 但不穿过任意一个长方块.

解 每个 20×20 的面上有 $19 \times 19 = 361$ 个在其内的格点. 因为立方体有三对平行的面, 所以共有 $361 \times 3 = 1\,083$ 条可能存在的直线, 针可以沿它们通过立方体, 图中用有向直线表示了它们中的一条. 假定我们的目的不能到达, 那么这 1 083 条直线必须均被长方块所阻拦, 而这种阻拦仅可能被一个长方块的 2×2 的面的中心所实现.

我们来证明一条所说的直线必被偶数块长方块所阻拦. 现对图 1 中的有向直线, 我们来考察在立方体中所标出的 $m \times n \times 20$ 的大长方块, 它的边界由所说的有向直线和标出的在立方体表面的四个面确定. 这个大长方块中的单位立

方体由两类组成：一是不阻拦有向直线的小长方体中的单位立方体，这时它可能有 0, 2 或 4 个单位立方体属于这个大长方体；二是阻拦这有向直线的小长方体中的单位立方体，这时它必有 1 个单位立方体属于这个大长方体。因为这个大长方体中的单位立方体的个数可被 20 整除，是偶数，而这就证明了我们的结论。然而，2 000 块小长方体至多阻拦这 1 083 条直线中的 1 000 条。因此，我们的目的一定能达到。

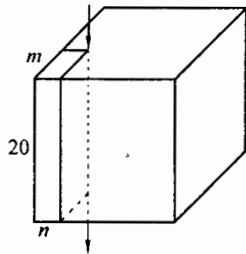


图 1