

❖ 翻动金币

将 10 个金币放在一个圆中,有头像的那面向上.允许两种运动:

- (1) 相邻的 4 个金币翻一个面;
- (2) 5 个相邻的金币 ○○○○○ 翻为 ××○××

能否在有限次如上的运动后,所有金币都翻成背面?

解 将 10 个在圆周上的金币按顺时针方向编号为 $1, 2, \dots, 10$. 我们对第 i 个金币加上权:若头像向上,有权 0 ;若头像向下,有权 i . 金币放好后(有些头像向上,有些向下),则各金币的权的总和称为此图像的权. 在约定的两种翻动下,总图像的权的变化如下:

由于翻动第 k 个金币,权的改变为 $0 \rightarrow k$ 或 $k \rightarrow 0$,差为 k 或 $-k$. 所以模 2 后,变化为 k . 因此运动(1)给出

$$i + (i + 1) + (i + 2) + (i + 3) \equiv 0 \pmod{2}$$

运动(2)给出

$$i + (i + 1) + (i + 3) + (i + 4) \equiv 0 \pmod{2}$$

这证明了变化后,权的改变为偶数.

另一方面,由于一开始放金币时,头像都在上. 因此此图的权为 0 . 若能经有限次运动,使得头像都向下,那么此图的权 $1 + 2 + \dots + 10 = 55$ 是奇数. 由于每次翻动,权作偶数次改变,从 0 开始,有限次后,所得图的权仍为偶数. 这证明了永远不可能经有限次翻动,使金币的背面全向上.