❖耳光响亮

图 1

450名议员中每一位都恰好打了他的同事之一的耳光. 试证: 他们能够选出150人组(只一个小会议), 他们中任一人都没有打过这个小会议的议员的耳光.

证明　确定第一位议员, 放在圆周上. 他打了某位议员一记耳光, 将这位议员按逆时针方向放在第一位议员之后. 这样依次作下去, 显然存在一个圈, 每人打了(按逆时针方向) 下一位议员的耳光. 因此 450 议员排成 n 个圈, 以及 m 个两人一对(他们互相打耳光). n 个圈中议员数分别为 $a_1, \cdots, a_n$, 于是

$$a_1 + \cdots + a_n + 2m = 450$$

而 $a_i \geqslant 3, 1 \leqslant i \leqslant n$. 所以 $450 \geqslant 2m + 3n$.

注意到 $a_i \geqslant 3$, 所以 $n \leqslant 150$. 将在一个圈中的议员标以数字, 取出标号为偶数的议员, 他们之间没有一人挨过另一人的耳光, 且未打过另一人的耳光, 且此圈外的人之间也是如此.

(1) a_i 偶, 共取出 $\frac{a_i}{2}$ 位, 即【$\frac{a_i}{2}$】(即不大于 $\frac{a_i}{2}$ 的最小整数) 位;

(2) a_i 奇, 共取出 $\frac{a_i - 1}{2}$ 位, 即【$\frac{a_i - 1}{2}$】=【$\frac{a_i}{2}$】位.

所以共取出

$$\sum_{i=1}^{n} 【\frac{a_i}{2}】 + 2m$$

位, 再在两人构成的圈中任取一人. 题目要求

$$【\frac{a_1}{2}】 + \cdots + 【\frac{a_n}{2}】 + m \geqslant 150$$

事实上,由 $a_i \geqslant 3$,所以 $2m + 3n \leqslant 450$,即 $n \leqslant 150$.而

$$\left[\frac{a_i}{2}\right] \geqslant \frac{a_i - 1}{2}, 1 \leqslant i \leqslant n$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_i}{2}\right] + m \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - 1}{2} + m = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i - n\right) + m =$$

$$\frac{1}{2}(450 - 2m - n) + m = 225 - \frac{n}{2}$$

因 $n \leqslant 150$,所以 $\frac{n}{2} \leqslant 75$,因此

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_i}{2}\right] + m \geqslant 225 - 75 = 150$$

至此证明了本题.