

❖ 不必找零

图 1

小王有若干人民币,一元 3 张,二角 4 张,五分 3 张,一分 4 张.证明:小王购买 4 元以内的商品总可以不用找补.

证明 因为对于任一张人民币取出的先后顺序,都不影响币值,这是组合问题,而且在这些人民币中可取出任意张数,当取法不同时,所得币值也不同.因此,由这些人民币可以组成不同币值的总数就等于组合总数.据不尽相异元素的组合总数公式,能组成不同的币值的种数为

$$(3 + 1)(4 + 1)(3 + 1)(4 + 1) - 1 = 399$$

而在4元以内,恰有399种不同的币值.所以,此人购买4元以内商品总可以不用找补.

注 这道题中,不同种类的钱币共14张,总币值3.99元.如果为了携带方便,假设总币值一定,而使钱币张数减少时,能不能得出同样的结论呢?我们可以回答如下:

(1) 设此人有12张人民币,二元1张,一元1张,二角4张,一角1张,五分1张,一分4张,由前述方法得

$$2 \times 2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 5 - 1 = 399$$

这就是说,总币值一定,当张数由14张减少到12张时,与原题有相同的结论.

(2) 设此人有10张人民币,二元1张,一元1张,五角1张,二角1张,一角2张,五分1张,二分1张,一分2张.由前述方法得

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3 - 1 = 575 > 399$$

组合数为什么会超过不同币值的总数呢?因为一角2张与二角1张,一分2张与二分1张是重复币值.如何剔除这些重复币值呢?现将二角1张,看成一角2张;二分1张;看成一分2张,即把原来的10张看成12张,其中二元1张,一元1张,五角1张,一角4张,五分1张,一分4张,这样一经改变元素的个数之后,既没有重复币值的可能,又不遗漏组成不同的币值可能,即组成不同币值的总数与组合总数是一致的.于是不同的币值的种数为

$$2 \times 2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 5 - 1 = 399$$

这就是说,总币值一定,当张数由14张减少到10张时,仍与原题有相同的结论.

一般地,设某人有 n 分人民币,如果此人购买价值不超过 n 分的任一商品都不需要找补,并且不同种类的钱币张数之和最少,那么此人应有不同种类的钱币(十元、五元、二元、一元、五角、二角、一角、五分、二分、一分应取的张数分别记为 $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$, $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数)张数的计算公式为

$$A = [a/1000] - 1, a = n + 1 \geq 1000$$

$$B = [b/500] - 1, b = a - 1000A$$

$$C = [c/200] - 1, c = b - 500B$$

$$D = [d/100] - 1, d = c - 200C$$

$$E = [e/50] - 1, e = d - 100D$$

$$F = [f/20] - 1, f = e - 50E$$

$$G = [g/10] - 1, g = f - 20F$$

$$H = [h/5] - 1, h = g - 10G$$

$$I = [i/2] - 1, i = h - 5H$$

$$J = j/1 - 1, j = i - 2I$$

在上述公式中,若 $a < 1000$,则 $A = 0$;若更有 $b = a < 500$,则 $B = 0$;依此类推.

上述公式是依据如下原则推出的:在总币值一定的条件下,为使钱币的张数最少,必须尽量多带大币值的钱币,但为使购买此大币值以下钱数的商品不需找补,带此币值的张数也必须受一定的限制,现以第一式为例加以说明.

设总币值大于10元,则应尽量多带10元的钱币,但为使购买10元以下的商品不需找

补,则 10 元以下的钱币必须不少于 9.99 元.因此 10 元钱币的张数 A ,应为满足不等式

$$n - 1000A \geq 999$$

的最大非负整数解,即

$$A \leq \frac{n - 999}{1000} = \frac{n + 1}{1000} - 1$$

其最大整数解为(当 $n + 1 \geq 1000$)

$$A = \left[\frac{n + 1}{1000} \right] - 1$$

除最后一式以外的其余各式同理可以推出,最后一式是显然的.

利用上述公式,可以解答前面提出的一类组合问题.现举两例,以资验证.

例 1 某人打算用 0.40 元选购价格不超过这个币值的任一商品都不需要找补,问此人最少应有不同种类的钱币各多少张?

解 因为总币值 $n = 40$ 分,则 $a = 40 + 1 = 41$.由上述公式知: A, B, C, D, E 均为 0, 于是

$$f = a = 41, F = [41/20] - 1 = 1$$

$$g = 41 - 20 \times 1 = 21, G = [21/10] - 1 = 1$$

依次类推得 $H = 1, I = 2, J = 1$,所以,此人最少应有:二角 1 张,一角 1 张,五分 1 张,二分 2 张,一分 1 张共 6 张人民币.

例 2 某人计划用 100 元购买不超过这个币值的任一商品都不需要找补,问此人最少应有不同种类的钱币各多少张?

解 因为 $n = 100$ 元 = 10 000 分,由上述公式知,此人最少应有:十元 9 张,五元 1 张,二元 1 张,一元 2 张,五角 1 张,二角 1 张,一角 2 张,五分 1 张,二分 2 张,一分 1 张,共 21 张人民币.(进一步的讨论详见附录(2))