❖数表取数

试证:在 10×10 表

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

不同行及不同列中共取出 10 个数,则必有两个数相同.

证明　将已给表中的第 i 行第 j 列的元素记作 a_{ij},将第 j 列中元素记为 $b_{ij} = j - a_{ij}$,于是原来表变为新表:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-8	2	2	2	2	2	2	2	2	2
-7	-7	3	3	3	3	3	3	3	3
-6	-6	-6	4	4	4	4	4	4	4
-5	-5	-5	-5	5	5	5	5	5	5
-4	-4	-4	-4	-4	6	6	6	6	6
-3	-3	-3	-3	-3	-3	7	7	7	7
-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	8	8	8
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	9	9
-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	10

将负数和 -0 加上 10,所以各行相等,它们是 $1,2,\cdots,9,10$. 即有

$$b_{ij} \equiv i \pmod{10}$$

所以

$$a_{ij} \equiv j - i \pmod{10}$$

用反证法证明如下.如果在原表中能从第 1 行中取出 a_{1i_1},第 2 行中取出 a_{2i_2},…,第 10 行中取出 $a_{10i_{10}}$,它们是 10 个不同数,这证明了

(1) 对 $a_{1i_1}, a_{2i_2}, \cdots, a_{10i_{10}}$ 而言,$i_1, i_2, \cdots, i_{10}$ 为 $1,2,\cdots,10$ 的一个排列;

(2) $a_{1i_1}, a_{2i_2}, \cdots, a_{10i_{10}}$ 为 $0,1,\cdots,9$ 的一个排列.

所以

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_{10} = 1 + 2 + \cdots + 10 = 55$$

$$a_{1i_1} + a_{2i_2} + \cdots + a_{10i_{10}} = 0 + 1 + \cdots + 9 = 45$$

而

$$b_{1i_1} + b_{2i_2} + \cdots + b_{10i_{10}} \equiv 1 + 2 + \cdots + 9 = 45$$

因此

$$b_{1i_1} + b_{2i_2} + \cdots + b_{10i_{10}} \equiv 5 \pmod{10}$$

然而

$$\begin{aligned} b_{1i_1} + b_{2i_2} + \cdots + b_{10i_{10}} &= (i_1 - a_{1i_1}) + \cdots + (i_{10} - a_{10i_{10}}) = (i_1 + \\ &\quad i_2 + \cdots + i_{10}) - (a_{1i_1} + \cdots + a_{10i_{10}}) = \\ &\quad 55 - 45 = 10 \end{aligned}$$

所以我们证明了

$$b_{1i_1} + \cdots + b_{10i_{10}} \equiv 0 \pmod{10}$$

这推出矛盾.至此证明了在不同行及不同列取出的数,至少有两个相同.