53 名人与数学问题

自有人类以来，人们就与数学结下了不解之缘，数学与人类紧密地联系在一起，其中也有一代旷世名人的参与。

53.1 爱因斯坦问题

爱因斯坦是世人皆知的伟大的德国物理学家。他对数学也很有研究，常常把解数学题作为一种消遣。在一次养病中，他的好友莫希柯夫斯基曾给他出了这样一道趣味数学题，供他消遣。这道数学题是："钟面上的时针和分针在什么位置时，两针可以对调，使得新位置仍然指示某一实际上可能的时刻？"

爱因斯坦听后略加思索，便侧身拿起笔在纸上勾了几下，马上算出了结果，而所用的时间并不比叙述这个问题的时间长多少。由此可见爱因斯坦在数学方面功底之深了。原来爱因斯坦是通过解含有两个参数的二元不定方程组来获得结果的。下面是爱因斯坦的解法：

设所求的钟面针的位置是表示 x 点 y 分，则时针所指刻度数 $t=5x+\frac{y}{12}$，分针所指的刻度数为 y。现将时针和分钟位置对调，这时所表示的时间可设为 s 点 t 分，则时针所指刻度数应为 $5s+\frac{t}{12}$，它与原来分针所指刻度数 y 相同，而分针所指的刻度数 t 就是原来时针所指的刻度数 $5x+\frac{y}{12}$。所以可得方程组

$$\begin{cases} y = 5s + \dfrac{t}{12} \\ t = 5x + \dfrac{y}{12} \end{cases}$$

若以 y、t 作为未知数，则可解得

$$\begin{cases} y = \dfrac{60(x + 12s)}{143} \\ t = \dfrac{60(s + 12x)}{143} \end{cases} \tag{53.1}$$

其中 x、s 表示钟点数，所以 $0 \leqslant s \leqslant 11, 0 \leqslant x \leqslant 11$。

在(53.1)式中，对 x、s 分别取从0到11间的12个不同的整数，便可得 $12 \times 12 = 144$ 个不同的数对 (t, y)，这些就是所求钟面时、分针可处的位置。但当 $x = s = 0$ 时，$y = t = 0$；而当 $x = s = 11$ 时，$y = t = 60$。在这两种情形下，两针重合并且指向12点，只能算作一种。因此，实际上所求位置可有143种。

53.2 拿破仑问题

法国皇帝拿破仑是19世纪风靡欧洲的政治家和军事家。他出身行伍，当过炮兵军官，长期的军事生活，使他对射击和测量中用到的三角几何知识有所接触，且对几何学的研究达到了很深的造诣，并曾与当时的著名数学家拉格朗日、拉普拉斯等讨论过数学问题。下面的几个问题，就是拿破仑研究的成果。

1. 拿破仑三角形

在几何学的趣题中，有冠上了他的名字脍炙人口的“拿破仑三角形”。

拿破仑三角形指在一个三角形的外侧，分别作 3 个等边三角形，以它们的中心为顶点所构成的三角形，称为“外拿破仑三角形”，如图 53 - 1 中的 $\triangle A_1A_2A_3$ 即为外拿破仑三角形。

若在一个三角形三条边的内侧，也分别作 3 个等边三角形，这时连接它们的中心所构成的三角形称为“内拿破仑三角形”，如图 53 - 2 中的 $\triangle B_1B_2B_3$ 即为“内拿破仑三角形”。

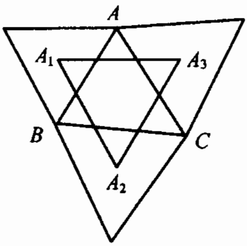


图 53 - 1

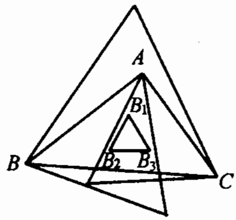


图 53 - 2

这两个三角形都是正三角形，拿破仑在当时就证明了我们在今天也并非容易完成的事实。

2. 只用圆规四等分圆周的拿破仑问题

参考本书 22. 只用圆规或直尺作图的巧思。

3. 只用圆规将圆面积四等分的拿破仑问题

由于拿破仑对数学的酷爱，即使在最激烈的战争时期他也常把解题当做一种美的享受。在远征埃及的航海途中，他曾问手下的人：“怎样把一个已知圆的面积用曲线分成四等分?”

手下人瞠目以对。拿破仑当即在已知圆内用圆规画了 4 个半径相等的小圆，难题便迎刃而解了。

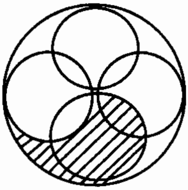


图 53-3

他是根据圆的对称特征，在已知圆里画 4 个小圆，其直径等于已知圆的半径，并且相切于已知圆的四等分点上，这 4 个小圆与已知大圆构成了一副美丽、对称、和谐的曲线图形，这时图中的偏月牙形阴影面积正好是已知圆面积的 1/4（图53-3）。

53.3 戴高乐与洛林十字架

在希特勒法西斯侵占法国期间，戴高乐将军组织法国流亡政府，坚持抗战。他胸前佩戴一枚十字架，即赫赫有名的洛林十字架，以示“还我河山”之意。

亚尔萨斯——洛林原为法国领土，普法战争后割让给普鲁士（即德国），有人以洛林为素材，制作了一个十字架，并编了一道几何作图题：“从图上的 A 点作一条直线，把洛林十字架一分为二，使两部分面积刚好相等，问这条直线如何作?”

戴高乐总统很有兴趣地把这个由 13 个小正方形组成的图形题做了出来（图 53-4）。他采用的方法如下：

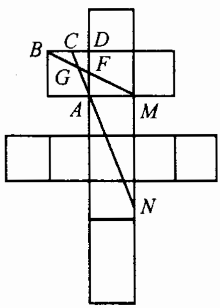


图 53-4

连接 BM，它与直线 AD 交于点 F，则 F 即为 AD 的中点，以 F 为圆心，FD 为半径作弧，与直线 BF 相交于点 G；再以 B 为圆心，BG 为半径作弧，与直线 BD 相交于点 C，连接 CA，并延长使它与十字架的边界相交于点 N，则 CAN 即为所要求作的直线。

戴高乐的这种作法，显而易见是求黄金分割点的办法，经计算，证明这种方法是完全正确的。

53.4 华罗庚问题

华罗庚教授曾提出过这样一道数学推理题：

某人有3个学习很好的儿子，他想考查一下3个儿子之中谁最机智，进行了如下的试验。

他拿来5顶帽子，在3顶帽子上缝上红星，另外2顶缝上白星，然后把孩子们的眼睛蒙住，给每个孩子头上戴上帽子，并把剩下的2顶拿走。然后拿掉蒙布，接着问孩子："您自己戴的帽子上缝的是红星还是白星？"3个儿子都思索了一会之后，其中有一个儿说出了他的帽子上缝的是什么星，受到了父亲的称赞。

那么其理由是什么呢？其关键是：3个儿子"学习都很好"、"都思索了一会儿之后"。

星的分配情况只有下列3种：① 白、白、红；② 白、红、红；③ 红、红、红。

若是第一种情况，则3个男孩中有一个不必"思索了一会儿之后"便能说出他自己帽上是红星，因为他看到了其余2人戴的白星；如果是第2种情况，另一个孩子(第三个也一样)当他看到一位戴白星、一位戴红星后，他会说出他戴的是红星的，故在这种情况下也用不着思考。

由于3个儿子"学习都很好"且又都"思考了一会儿"，则只能是第三种情况 —— 三人戴的帽子都是缝的红星。他们解答问题的条件是一样的，故最先说出自己戴红星的男孩最机智。因而受到父亲的称赞。

53.5 陈景润的难题

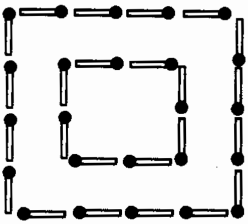
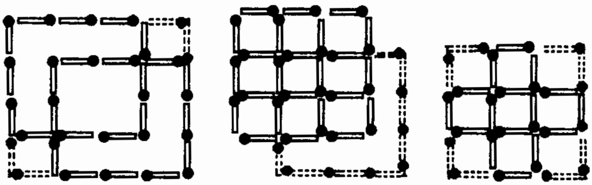


图 53-5

我国著名数学家陈景润从小就爱思考问题，有一次老师用24根火柴排成一大一小2个正方形(图 53-5)，让他移动其中的部分火柴，并提出如下要求：先移动图中的4根火柴，使两个正方形变成了3个；然后移动8根火柴，使图形成为9个全等的正方形；最后再拿掉8根火柴，再使图形变为5个正方形。

面对疑难，陈景润头脑冷静用心分析，很快找出了答案(图 53-6)。



(a) (b) (c)

图 53-6

53.6 苏步青问题

一次一个学生提出一个问题请教大数学家苏步青教授。问题是：

有一条长长的阶梯，每步跨 2 阶，则最后剩一阶；每步跨 3 阶，则最后剩 2 阶；每步跨 5 阶，最后剩 4 阶；每步跨 6 阶，最后剩 5 阶。只有每步跨 7 阶，才正好到头。您知道台阶共有多少阶吗？

苏步青教授想了想说："这道题有多种算法，答案是 119。"

事实上，设有台阶 x 阶，则 x 能被 7 整除，而 $x+1$ 能同时被 2、3、5、6 整除，不难算出 $x = 119$。

53.7 高斯问题

大数学家高斯，从小就爱思考钻研问题。一次，邻居碰到一个难题来请教高斯。题目是：

有一只盛满了 4 升水的水壶，需要平均将水分给两个孩子。但没有秤和其他量具，只有两只空壶可用，一只空壶可装 $2\frac{1}{2}$ 升水，另一只水壶可装 $1\frac{1}{2}$ 升水，如何来分呢？

高斯听了，托腮沉思片刻，想出了一个把水从一只壶灌到另一只壶里的方法，可将水平均分给两个孩子，高斯的灌法如表 53 - 1。

表 53-1

灌注次数	4 升	$1\frac{1}{2}$ 升	$2\frac{1}{2}$ 升
1	$1\frac{1}{2}$	—	$2\frac{1}{2}$
2	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	1
3	3	—	1
4	3	1	—
5	$\frac{1}{2}$	1	$2\frac{1}{2}$
6	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	2
7	2	—	2

53.8 岳飞问题

宋朝名将岳飞，一向注重军事训练，培养出了一支精锐的“岳家军”。

一次，全体岳家军出来接受检阅，组成了 62 个方阵，每个方阵的大小都一样，很是威风。岳飞见了很高兴，脱下帅袍，加入将士们的行列，战旗一挥，阵势改变，包括岳飞在内的全体人们，重新排成了一个新的大方阵。问岳家军共有多少人？

答案是全部岳家军(包括岳飞在内) 共有 3969 人。

设原 62 个小方阵每边人数为 y，最后岳飞加入后排成的大方阵每边人数为 x，则

$$62y^2 + 1 = x^2, 62y^2 = (x + 1)(x - 1)$$

这个不定方程的最小正整数解为：$x = 63, y = 8$。显然下一个解是不符合题意的，即

$$x = 7937, y = 1008$$

则

$$x^2 = 7937^2 \approx 8000^2 = 64000000$$

由此判断，岳家军不会有这么多人，故 $x = 63, y = 8$ 符合题意，知岳家军有 $x^2 = 63^2 = 3969$(人)。