51 等分图形面积问题

图形面积的等分是一类富有创造性思维的几何问题，对培养聚合与发散性思维都有大益处。

51.1 等分正方形面积

在正方形边界和内部均匀分布有16个点,试用连接这些点所成的线段或折线,将正方形的面积二等分。

可分成如下13种图形。从图中不难看出,所分成的等积两部分图形都是中心对称图形,而这些折线也是中心对称图形,其对称中心就是正方形的中心(如图51-1)。

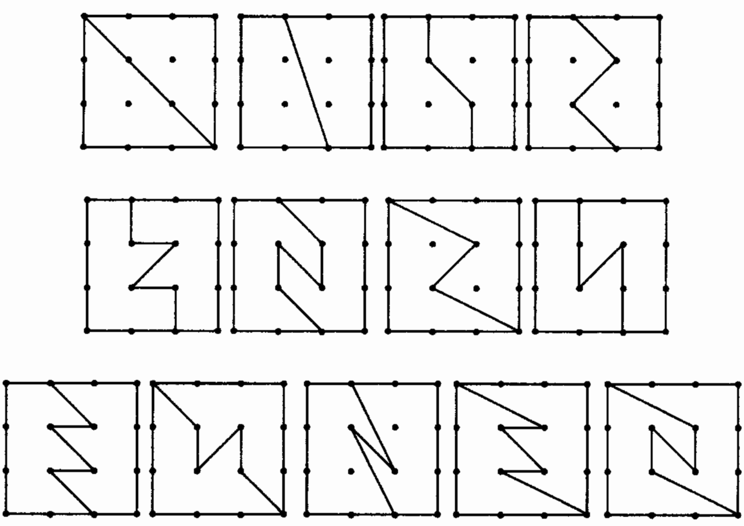

图51-1

51.2 四等分三角形面积

用不同的方法，把一个已知三角形的面积分成四个面积相等的小三角形。

下面图 51 - 2(a) ~ 2(s) 中，都是根据“等底等高的两个三角形面积相等”而作的。图 51 - 2(p) 中，D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的一个四等分点，O 是 $\triangle ACD$ 的重心，因而有四个三角形 $\triangle ABD$、$\triangle AOD$、$\triangle DOC$、$\triangle COA$ 的面积相等。

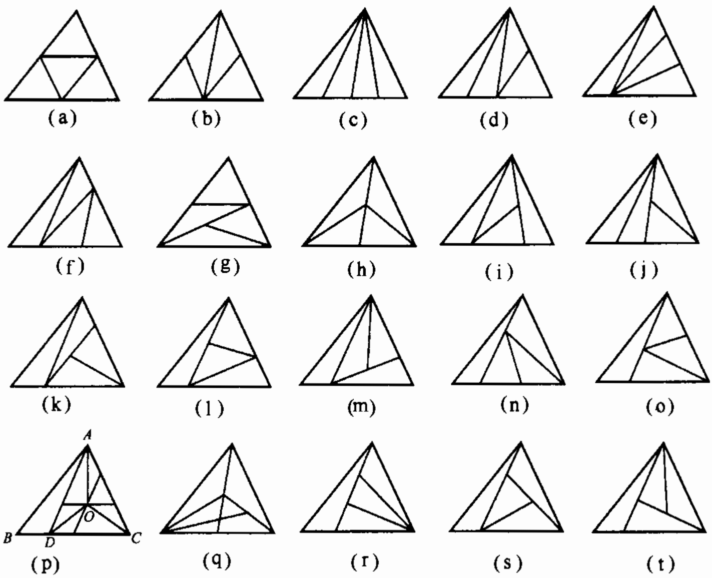

图 51 - 2

51.3 辟一半矩形面积为花坛

在一个 3m × 4m 的矩形地块上，要辟出一部分花坛，使花坛

的面积为矩形面积的一半，请给出您的不同设计(第 17 届国际数学教育心理学会议的公开课问题)。

从面积和对称美的角度出发，根据各自的经验和审美要求，得出如下的一些优美的设计方案(图 51 - 3)。

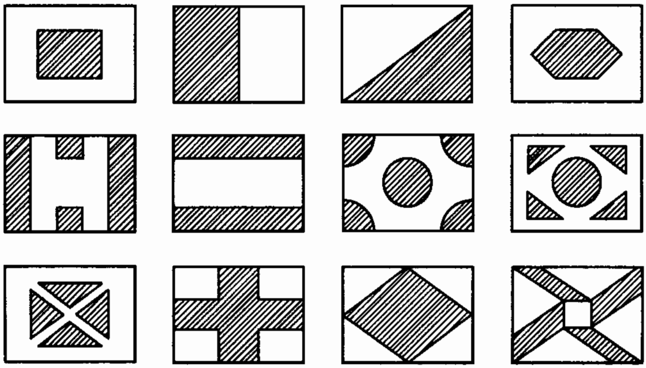

图 51 - 3

51.4 求下列图形中阴影部分的面积

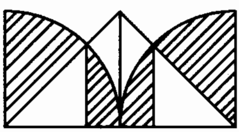

图 51 - 4

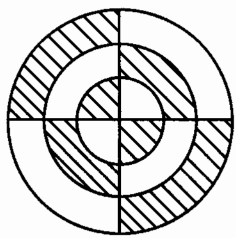

图 51 - 5

在图 51 - 4 中，将图形重新割拼，可得到如图 51 - 6 的图形，这个图形就比原图形简单多了。它是一个半圆包含一个大三角形，这个大三角形是一个等腰直角三角形，它的两条直角边刚好是圆的半径。其阴影部分面积是半圆面积减去这个等腰直角三

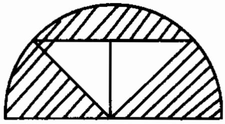

图 51-6

角形面积。设圆半径为r,则

$$S_{阴影}=\frac{1}{2}\pi r^2-\frac{1}{2}r^2=\frac{1}{2}(\pi-1)r^2$$

而图51-5是一个中心对称图形,结构很美,若对每一个阴影部分都计算,则很繁琐,且小圆的半径不知道。其实我们如果利用旋转或对折的方法,则问题可迅速获解。

(1) 将相对的两个1/4大圆绕圆心旋转(顺时针、逆时针皆可)90°,即可知阴影部分是两个相等的1/4大圆,即是半个大圆面积。

(2) 以大圆直径为边, 把上半圆与下半圆对折重叠, 可知阴影部分刚好是一个大半圆。

51.5 看图回答

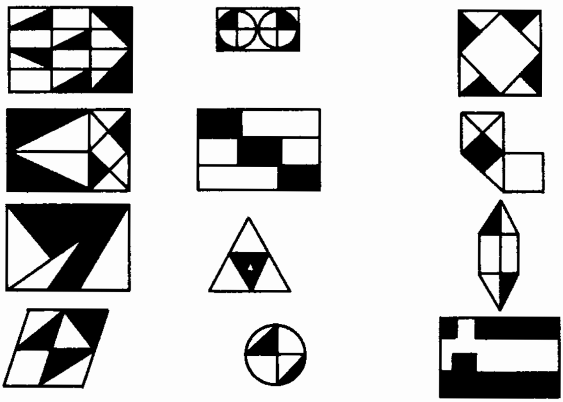

图 51-7

在图 51-7 中，阴影部分在各图中占有一定的比例，您能迅速说出各图中阴影部分占各图总面积的几分之几吗?

51.6 看图计算

请计算图 51-8 中各图形中阴影部分面积占总面积的几分之几。

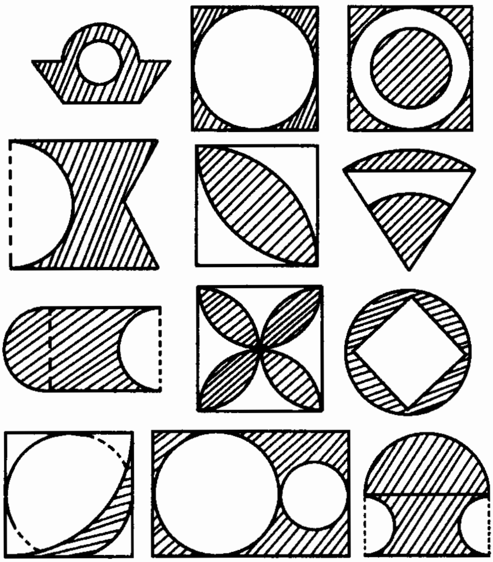

图 51-8

51.7 寻找等分正三角形面积的最短分割线

在边长为 1 的正三角形中画一条分割线（可以是直线、折线或曲线），把这个正三角形的面积二等分，并比较各条分割

线的长短，看一看能否找到最短分割线。

下面我们来试着寻找：

(1) 中线是容易想到的，如图51-9，$AD=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.866$。

(2) 如图 51-10，作 $DE /\!/ BC$，且使 $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，由 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$，所以$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{DE^2}{BC^2}=\frac{DE^2}{1^2}=\frac{1}{2}$，得 $DE^2=\frac{1}{2}$，所以 $DE=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.707$。

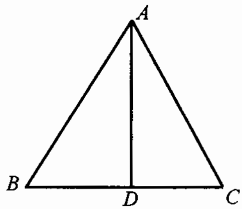

图 51 - 9

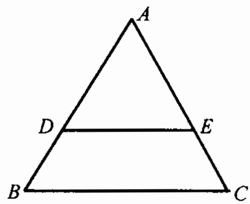

图 51 - 10

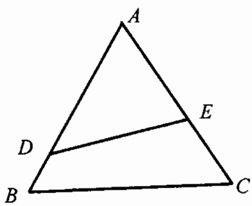

图 51 - 11

(3) 如图51-11，作 DE（$DE \not\parallel BC$），且使 $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，则

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}AD\cdot AE\cdot \sin A}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot \sin A}=\frac{1}{2}$$

得 $AD\cdot AE=\frac{1}{2}$。

在 $\triangle ADE$ 中，由余弦定理，得

$$\begin{aligned}DE^2&=AD^2+AE^2-2AD\cdot AE\cos 60^\circ\\&\geqslant 2AD\cdot AE-AD\cdot AE\\&=AD\cdot AE=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

所以 $DE=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.707$。

(4)如图 51-12,在中线 AD 上取一点 G,在 AB、AC 上各取一点 E、F,且使 $AE=AG=AF$,四边形 $AEGF$ 的面积 $=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{8}$,于是

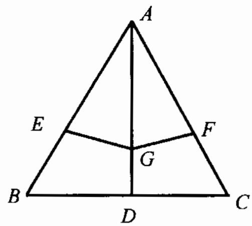

图 51 - 12

$$S_{\triangle AEG}=\frac{1}{2}AE\cdot AG\cdot\sin 30^\circ$$
$$=\frac{1}{4}AE^2=\frac{\sqrt{3}}{16}$$

得 $AE^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$。

在 $\triangle AEG$ 中,由余弦定理

$$EG^2=AE^2+AG^2-2AE\cdot AG\cdot\cos 30^\circ=2AE^2-\sqrt{3}AE^2$$
$$=AE^2(2-\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{4}(2-\sqrt{3})=\frac{2\sqrt{3}-3}{4}$$

因此分割线的长为 $EG+GF=2EG\approx 0.681$。

(5) 由以上作法,联想到用圆弧来分割,可能分割线会更短。

事实上由图 51 - 13,知

$$S_{扇形ADE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

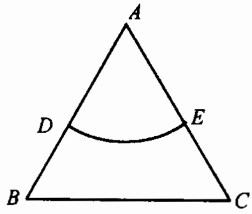

图 51 - 13

有$\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot AD^2=\frac{\sqrt{3}}{8}$，

求得 $AD\approx 0.643$

所以$\overset{\frown}{DE}$之长 $=\frac{1}{6}\cdot 2\pi\cdot AD\approx 0.673$。

由上可知，圆弧的等面积分割线最短。

51.8 三等分圆面积

参考本书 35. 考考您的智力。