50 归纳与递推

对于一些命题、定理、公式，我们常这样发问："它们是怎样得出来的?"当然可以回答："是人们探索出来的。"但到底如何探索？是否有规律可循？恐怕也是难以说清的。虽然如此，但对于某些用数学归纳法证明的命题（或公式）的结论，是可以通过"归纳与递推"的关系而探索出来。

数学归纳法是一种证明与正整数有关的数学命题的重要方法。然而数学归纳法证明的命题的结论都是已经给出来的，那么，当初人们是如何得出这些结论的呢？也许是由归纳中找出"规律"而得到的。是否还有其他方法呢？其实，"归纳与递推"有着密切的联系。

在原高中数学教材中有这样一个问题："平面内有 n 条直线，其中任何两条不平行，任何三条不过同一点，证明交点个数 $f(n)=\frac{1}{2}n(n-1)$。"下面我们就来探索是如何得出交点个数"$f(n)=\frac{1}{2}n(n-1)$"的。

我们可以把求直线交点的个数转化为求一个递推数列的通项公式的问题：

"已知数列 $\{a_n\}$：$a_1=0$，且当 $n\geqslant 2$ 时，有 $a_n=a_{n-1}+n-1$，求 a_n。"

其中 $a_1=0$，是因为平面内只有一条直线时无交点；而递推式 $a_n=a_{n-1}+n-1$，是说当平面上有符合条件的 $n-1$ 条直线时有 a_{n-1}个交点，当再增加一条直线 l（第 n 条直线）时，由题设知直线 l 与原有的$n-1$ 条直线都相交，会有交点

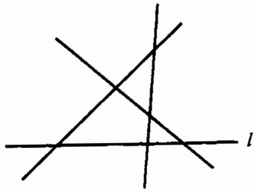

图 50-1

$n-1$个，故这时平面上n条直线会有交点个数$a_n=a_{n-1}+n-1$（$n\geqslant 2$），如图 50-1 所示。

由上可知，求直线交点的个数，需构造一个递推数列，而其关键是建立递推关系式

$$a_n = a_{n-1} + n - 1(n \geqslant 2)$$

下面我们来求此数列的通项公式：

由 $a_n = a_{n-1} + n - 1$，有 $a_n - a_{n-1} = n - 1$，当 n 分别取 $2, 3, \cdots, n$ 时，有

$a_2 - a_1 = 1, a_3 - a_2 = 2, a_4 - a_3 = 3, \cdots, a_n - a_{n-1} = n - 1$。

将以上这 $n-1$ 个等式左、右两边分别相加，得$a_n - a_1 = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \dfrac{(n-1)[1+(n-1)]}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

从而得到

$$a_n = a_1 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$$

这便是平面上 n 条直线交点个数的公式。

下面我们再来探索两个命题的结论：

“平面上有 n 条直线，其中任何两条不平行，任何三条不过同一点，问这 n 条直线可将平面分成多少部分？”

分析：因平面上一条直线将平面分成两部分，当平面上已有符合条件的 $n-1$ 条直线，若再增加一条直线 l（第 n 条直线）时，由图 50 - 1 可知，直线 l 与 $n-1$ 条直线会有 $n-1$ 个交点，这时直线 l 被分成 n 段，而每一段可将原有平面的每一部分都分成了两部分，可知直线 l 将平面多分成了 n 部分，由此可构造

如下的递推数列：

已知数列$\{a_n\}$中：$a_1 = 2$，且 $a_n = a_{n-1} + n(n \geqslant 2)$，求 a_n。

解：由 $a_n = a_{n-1} + n(n \geqslant 2)$，得 $a_n - a_{n-1} = n$，有

$a_2 - a_1 = 2, a_3 - a_2 = 3, a_4 - a_3 = 4, \cdots, a_n - a_{n-1} = n$

将以上这 $n-1$ 个等式的左、右两边分别相加，得

$$a_n - a_1 = 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(1+n)}{2} - 1$$

所以 $a_n = a_1 + \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$

故知平面上符合条件的 n 条直线可将平面分成$f(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ 部分。

再看下面的一个问题：

“平面上有 n 个圆，其中任意两个圆都相交于两点，任意三个圆都不相交于同一点，问这 n 个圆可将平面分成多少部分？”

分析：平面上有一个圆时，将平面分成两部分；当平面上已有符合条件的 $n-1$ 个圆时，若再增加一个圆 C(第 n 个圆)，由图 50 - 2 可知，圆 C 与原 $n-1$ 个圆都分别有两个交点，知圆 C 可将平面多分成$2n-2$部分，故可构造如下递推数列：

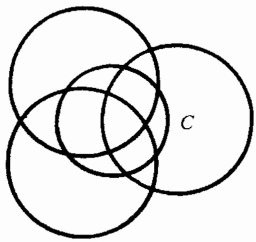

图 50 - 2

已知数列$\{a_n\}$中：$a_1 = 2$，且 $a_n = a_{n-1} + 2n - 2(n \geqslant 2)$，求 a_n。

解：由 $a_n = a_{n-1} + 2n - 2(n \geqslant 2)$，有 $a_n - a_{n-1} = 2(n-1)$，因而有

$$a_2 - a_1 = 2 \times 1, a_3 - a_2 = 2 \times 2,$$

$$a_4 - a_3 = 2 \times 3, \cdots, a_n - a_{n-1} = 2(n-1)$$

将以上 $n-1$ 个等式左、右分别相加,得

$$a_n - a_1 = 2[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)]$$

$$= 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)$$

故 $a_n = a_1 + n(n-1) = 2 + n^2 - n = n^2 - n + 2$

所以平面上符合条件的 n 个圆可将平面分成 $f(n) = n^2 - n + 2$ 部分。

仿此,我们还可提出许多类似的问题,并可推出其结论。还可进行类比,将平面问题推广为空间问题。

由归纳与递推的关系,可知求递推数列通项公式问题,是一个探索与正整数有关的数学结论的有力武器,我们应好好地利用这个有用的武器为人类服务。