

49 奇妙的曲线

曲线，以其活泼变化的外形惹人喜爱，耐人寻味。而螺线（被誉为生命之线）具有曲率半径由小到大的有趣渐变，反复盘绕是最有韵律的形式之一。在欧洲巴洛克建筑风格时期，备受青睐，事实上，它的装饰风格的巨大活力也为那些艺术增添了光彩。

49.1 黄金矩形序列螺形线

图 49-1 是黄金矩形依次舍去所作的正方形，得到不断缩小的黄金矩形序列。图 49-1 是分别以各正方形靠“里”的一个顶点为圆心，以正方形的边长为半径，所作 $1/4$ 圆弧所连成的曲线，可知是一条螺形线。

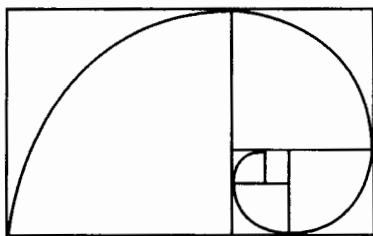


图 49-1

49.2 对数螺线

常记为 $\rho = ae^{\theta}$ 。 ρ 表示螺线上的点到心的距离。

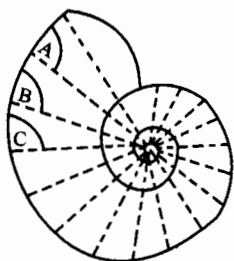


图 49-2

当 $\theta \rightarrow +\infty$ 时, 无限扩展; 当 $\theta \rightarrow -\infty$ 时, 无限缩小。全都永无终止 (图49-2)。

49.3 圆的渐伸线

如图 49-3, 将绕在圆上的绳线定住一点 (图中铅笔所在点), 再将绳拉紧伸开, 则铅笔所画出的曲线, 称圆的渐伸线。圆的渐伸线常用于斜齿轮齿面的形状, 以便有很好的齿合。可见只有数学才能这样深刻地揭示螺旋线的美妙。

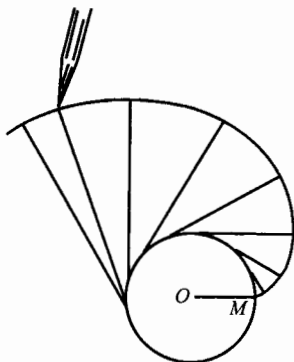


图 49-3

49.4 旋轮线 (摆线)

当圆轮沿一直线滚动时, 圆轮上一点的轨迹是旋轮线, 或称摆线。这是一类考虑人类智力的曲线。伽利略定律指出, 摆线的一个拱弧和它的底所围的面积等于母圆面积的 3 倍; 1658 年, 英国建筑师兼数学家连斯, 论证了摆线一拱之长等于母圆

半径的 8 倍。我们欣赏摆线，不仅在其“秀外”，尤其在于其“慧中”（图 49-4）。

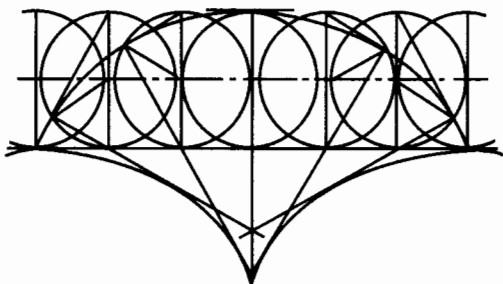


图 49-4

49.5 星形线

动圆绕定圆（在外侧或内侧）滚动，动圆上一点的轨迹称为外摆线或内摆线。当定圆半径是动圆半径的整数倍时，曲线是完整的（封闭的）。当定圆半径和动圆半径相等时，描出的是心脏线。当动圆在定圆内侧滚动，而半径为后者的 n 分之一时，描出的是具有 n 个尖点的内摆线。当 $n=4$ 时，又叫星形线（图 49-5）。

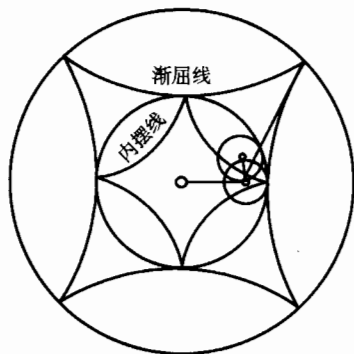


图 49-5

当 n 为分数时，要多滚几圈才能使曲线闭合。当 n 为无

理数时，则永不闭合（理论上的说法）。现在有一种塑料制的万花曲线板，就是依上述各种情况设计的，能画出各种摆线。一些钞票、有价证券也印有复杂的此类花纹，以防伪造。摆线的渐伸线和渐屈线相似。若将凹成摆线作成下滑冰道面，则滑冰者不论从何点出发，则都花费的是同样的时间可降到谷底，所以这种曲线又叫做“等时曲线”。

49.6 四个直纹面的交会

图 49-6 可看成是四个直纹面的交会，也可看成是平面上的渐伸线、渐屈线，或者包络。几何与图案总是紧密结缘的，其中我们又看到了摆线的“影子”（此图形可用几何画板作出，从而可观赏其动态变化的美）。

曲线是使人感到愉悦的艺术写真。在曲线研究中，现代各种科技产品的外形，如机翼、船舶、汽轮机叶片等的制造，需经过各种模拟实验找出一些离散的点描绘其大略，而一门如何将这此点连续化的数学应运而生，这便是“曲线拟合”。

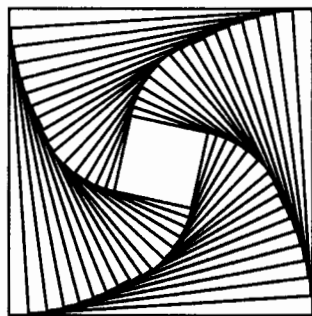


图 49-6