

42 回文数与回文诗

数学与文学有着相似之处，如数学中有回文数，诗中有回文诗便是例子。

在正整数中，有一种数无论从左往右，还是从右往左读，都是一个数，称这样的数为“回文数”，如 88，454，7337，43534 等都是回文数；有一种诗，顺念倒念都有意思，称这样的诗为“回文诗”。如，

云边月影沙边雁，水外天光山外树。

倒过来读，便是

树外山光天外水，雁边沙影月边云。

其意境和韵味读来真是一种享受！

42.1 回文数撷趣

1. 回文数的个数

两位数中只有 9 个回文数，它们是 11，22，33，44，55，66，77，88，99；三位数中的回文数，由前两位数确定，共有 $9 \times 10 = 90$ 个，它们是 111，121，131， \dots ，212，222， \dots ，989，999；类似地四位数的回文数共有 $9 \times 10 = 90$ 个。一般地， n 位的回文数的个数：

当 n 为偶数 ($n = 2k$) 时，有回文数 $9 \times 10^{k-1}$ 个；

当 n 为奇数 ($n = 2k + 1$) 时，有回文数 9×10^k 个。

2. 回文数猜想

任取一个自然数，与它的倒序数相加，若其和不是回文

数，再与其倒序数相加，重复这一步骤，一直到获得回文数为止。例如

$$68 \rightarrow \begin{array}{r} 68 \\ + 86 \\ \hline 154 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 154 \\ + 451 \\ \hline 605 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 605 \\ + 506 \\ \hline 1111 \end{array}$$

于是有数学家提出一个猜想：

不论开始采用什么整数，在经过有限次倒序相加步骤后，都会得到一个回文数。至今还不知道这个猜想是对还是错的。

既是素数又是回文数的数：比如 11，101，757 等等，除了 11 以外，其余回文素数的位数都是奇数。虽然，数学家们相信回文素数有无穷多个，但这也是尚无法证明的猜想。人们借助电子计算机发现，在完全平方数、完全立方数和完全四次方数中的回文数，其比例要比一般自然数中回文数所占的比例大得多，如 $121 = 11^2$ ， $14\ 641 = 121^2$ ， $40\ 804 = 202^2$ ， $343 = 7^3$ ， $1331 = 11^3$ ， $1\ 030\ 301 = 101^3$ 等都是回文数。但是人们迄今未能发现五次方以及更高次幂的回文数。

充满猜想的回文数像是一座迷宫，它在等待后来的有志者去揭示其间的奥秘。

3. 回文数的加减

将两个位数相同的回文数相加减，其结果有可能仍是一个回文数。

例如， $56\ 365 + 12\ 621 = 68\ 986$ ， $5775 - 2222 = 3553$ 。

4.1 的“金字塔”

$$1^2 = 1$$

$$11^2 = 121$$

$$111^2 = 12321$$

$$1111^2 = 1234321$$

$$11111^2 = 123454321$$

.....

可以看出，等式的右边都是回文数。

5. 人生难遇对称年

从11世纪到20世纪的1000年中，对称的年份只有10个，即1001，1111，1221，1331，1441，1551，1661，1771，1881，1991，也就是说一个世纪只有一个对称年。两个对称年间隔110年，所以，一个人活到110岁，也只能遇到一个对称年。如果活到两个对称年之间，即使活到一百岁，也遇不到一个对称年。但如果生年巧，虽然年龄小，也可以遇到对称年。

只有20世纪与21世纪的对称年相隔最近，只有11年。即1991年出生的孩子，只需经过11年，又可赶上一个对称年2002年，这样一生便可能赶上两个对称年了。从30世纪到31世纪也是如此。

42.2 回文诗

回文是根据汉字语言特点创造的修辞方法，切莫把这样的作品看做“文字游戏”。因为要构造出一首回文诗，选词和巧妙的安排是需要很费心思的。

下面列举几种不同形式的类似“回文”的诗、词、联：

1. 苏轼的回文诗

苏东坡写过一首《题金山寺》的回文诗

潮随暗浪雪山倾，远浦渔舟钓月明。
桥对寺门松径小，巷当泉眼石波清。
迢迢远树江天晓，蔼蔼红霞晚日晴。
遥望四山云接水，碧峰千点数鸥轻。

让我们把这首七律由后往前读下去，就成了：

轻鸥数点千峰碧，水接云山四望遥。
晴日晚霞红蔼蔼，晓天江树远迢迢。
清波石眼泉当巷，小径松门寺对桥。
明月钓舟渔浦远，倾山雪浪暗随潮。

这不是一首与原诗意境相同的优美的七律吗？

2. 茶碗回文

从前，茶馆里用一种写有五个字的茶碗，如图42-1，这五个字在圆形茶碗上均匀分布一周，不论以哪个字领头，都是一句令人愉快的话：

- ①可以清心也
- ②也可以清心
- ③心也可以清
- ④清心也可以
- ⑤以清心也可



图 42-1

哪一句都是赞美这店的茶好劝人喝茶的，这无异于给茶馆反复作招揽顾客的广告。

3. 回文对联

北京有一家“天然居”的名餐馆，顾客进店，便可看见一副对联：

客上天然居，居然天上客。

顾客一见到自己居然成了天上的客人，虽然还未进餐，就产生了一种好感。这副对联不但意境好，而且是一首回文联，即将上联倒过来念，便成了下联。这种回文联又称“卷帘联”，就像现在百叶窗帘一样，既能从上往下顺放，又能从下往上倒卷。

据说清代的乾隆皇帝把这幅回文联两句并成一句，作为新的上联，看谁能对出下联？乾隆手下有一名大臣名叫纪昀（音同“匀”），居然对出了下联：

人过大佛寺，寺佛大过人。

可不是吗？人们来过大佛寺，寺庙里的佛像自然是大过人的。这种巧妙的对仗，不正体现出一种对称、和谐的美吗？

4. 回文词

比起回文诗、回文联，回文词的难度要更大一些。清代丁澎曾写过一首《菩萨蛮》的回文词：

下帘低唤郎知也，也知郎唤低帘下。来到莫疑猜，猜疑莫到来。

道依随处好，好处随依道。书寄待何如，如何待寄书。

全词共八行，偶数行都是上一行倒着念而成。每行都是奇数个字（5或7个），因而，相邻的奇数行与偶数行的中间一个字都是相同的。可见作者费心费神，用词用句之巧。

5. 顶针诗

有一种修辞方法叫“顶针”，即用前一句末尾的字（或词），作为下一句的起头。这样，同样的字（词），可以造成上

下句蝉联递接的趣味。唐代大诗人李白的《白云歌送刘十六归山》，是一首以“词”顶针的诗：

楚山秦山皆白云，白云处处长随君。

长随君，君入楚山里，云亦随君渡湘水。

湘水上，女萝衣，白云堪卧君早归。

从以上列举的一些回文数与回文诗中，可见其各种情趣。然而，这种情趣又似有相通之处，是一种对称的美使人心里产生的一种愉悦。

下面给出一道用回文联编成的形成回文数的趣题，可看出其中相通的情趣。列出供大家欣赏：

$$\begin{array}{r} \text{人过大佛寺} \\ \quad \quad \times 4 \\ \hline \text{寺佛大过人} \end{array}$$

在上面的乘法算式中，每个汉字代表一个数字，不同的汉字代表不同的数字，请您把这道算式还原出来。

这道题只有惟一的一个答案，即 $21\ 978 \times 4 = 87\ 912$ 。这个答案是猜想出来的？凑出来的？还是算出来的？请读者去想一想吧！