

41 单位圆的魅力

古希腊毕达哥拉斯学派认为：“一切立体图形中最美的是球形，一切平面图形中最美的是圆形。”17世纪数学家布龙克尔说过：“圆是第一个最简单、最完美的图形。”现代学者钱钟书云：“窃尝谓形之浑简完备，无过于圆。”而黑格尔更有“以哲学比圆”之说，可见历代和现代学者对圆的赞赏和重视！

从动的眼光看，圆，大至宇宙，小至粒子，都有它的轨迹。圆可看成车轮之恒转，无始无终，无穷无尽；圆也可看成从某一起点出发的动点，与一定点保持一定距离运动一周之后，又回到原来起点的轨迹，形成起点与终点的重合，即有始有终。因此，圆集有限与无限于一身，形成辩证的统一。

从静的眼光看，圆具有各个方向的中心对称，其形状增之显多，缺之显少，都将失之完备，无论处于哪个位置，都具有同一的形状，给人以一种匀称、稳定、和谐的感觉。因此，圆又融动、静于一体。

单位圆是以原点为圆心，以1个单位长为半径的圆。既具有圆的各种通性，又具有自身的特殊性，好像是位于平面“中心”的一个“平面单位元素”，更是一个最基本、最简单的图形。

单位圆的特殊性将显示其特殊的功能。如原子的核子，蕴藏着巨大的能量；如物质的细胞，孕育着无穷的活力。

利用单位圆中的有向线段定义的三角函数（称三角函数线），具有鲜明的直观性；利用三角函数线平移作出的三角函数图像，恰如同展开一幅折叠的神奇画卷。那正弦、余弦曲线

如同滚动的万顷波涛；那正切、余切曲线犹如奏出的优美乐章，真是妙不可言！而单位圆的内接正十边形的边长，又恰为黄金数 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ ，其中蕴藏着无穷的奥妙！

且看单位圆的方程 $x^2 + y^2 = 1$ ，又看同角三角函数的关系式 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ，再看斜边 $c = 1$ 的直角三角形的三边关系式 $a^2 + b^2 = 1$ ，还有模为 1 的复数 $z = a' + b'i$ ，有关系式 $a'^2 + b'^2 = 1$ 。它们的结构是如此的相似和雷同，不是说明了点 (x, y) 、 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 、 (a, b) 、 (a', b') 都是单位圆上的点吗？不正说明了单位圆沟通了解几、三角、平几、代数间的联系吗？这之间的微妙关系，不正体现出数学结构和内容的和谐、统一、协调之美吗？因此，单位圆蕴藏着无穷的奥妙，显示出无穷的魅力。而奥妙与魅力的背后，必将蕴藏着广泛的功能。单位圆又是一块宝地，其功能（包括对数学本身的实用功能和对学生进行美育和辩证唯物主义教育功能）与宝藏，有待我们去继续发掘、开采。