40 两个卓越而奇妙的等式

瑞士数学家欧拉，不仅是 18 世纪最多产的数学家，也是数学史上最多产的数学家。他一生为人类作出了卓越的贡献。他的不朽著作是包括 886 种著作和论文的欧拉全集，由瑞士自然科学学会从 1907 年开始出版，预计将出 100 本。

当欧拉只有 28 岁时便瞎了一只眼睛，到 59 岁时，竟双目失明了。他仍以高度的毅力坚忍不拔地从事数学研究，他凭着一种惊人的记忆力，让别人笔录下他的研究成果。

欧拉使人感到惊讶和钦佩的，不仅是他的著作如此之多，而且他的文字通俗易懂，引人入胜，使用的符号也先进新颖，所以大家都喜欢读他的书，很多伟大的数学家都怀着尊敬的心情对欧拉说出赞美的语言。

大数学家拉普拉斯常告诫年轻的数学家：“读读欧拉，他是我们每一个人的老师。”被誉为“数学之王”的高斯对欧拉给予很高的评价：“欧拉的工作研究将仍旧是对于数学的不同范围的最好的学校，并且没有任何别的可以代替它。”

美国数学史家克莱因说：“没有一个人像他那样多产，像他那样巧妙地把握数学；也没有一个人能以采集和利用代数，几何分析的手段去产生那么多令人钦佩的结果。他是顶刮刮的方法发明家，又是一个熟练的巨匠。”

如今，以欧拉命名的定理、定律、方程、公式可说是多得不可胜数，其中两个奇妙的公式是其卓越代表。

40.1 $e^{i\pi}+1=0$

这是欧拉在1748年得到的。几乎在所有的复数课本中都提到有复数的三角形式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

当 $x=\pi$ 时，$e^{i\pi}=-1$　就可以得到 $e^{i\pi}+1=0$。

数学家克莱因认为这是整个数学中最卓越的公式之一。它漂亮简洁地把数学中五个最重要的数——1、0、π、e 以及 i 联系在一起。有人称这五个数为“五朵金花”，这是因为，它们在数学中处处盛开；也有人称这五个数为五虎大将，这是因为这个公式有“呼风唤雨”般的通神本领，欧拉竟能将这五个最常用、最基本、最重要的量聚集在一起！

在法国巴黎的发明宫中，有一个数学史陈列室。其中，古代数学部分与近代数学部分的间墙上，就悬挂着这个公式“$e^{i\pi}=-1$”。由这公式可看出人类创造的数学、符号、算式是何等巧妙神奇地体现了数学中的奇异之美。现对这五个数作些简要介绍：

自然数的起始数是“1”：它是整数的单位，是数字的始祖，它在数学中扮演了一个很重要的角色，可以这样说，如果没有数1，也就没有一切数。

中性数“0”：“0”是正数与负数间的一个分界数，是坐标系的原点，是运动过程的起点。单个的“0”代表“无”，但在各种进制的数字里，只有它参与才能进位，例如1到9都是一位数字，而10便成了两位数字，即一进到了十位。

圆周率“π”：是在科学中最著名和用得最多的一个数。

1767 年，德国数学家兰伯特首先证明了 π 是无理数，1794 年勒法证明了 π^2 是无理数，1882 年德国数学家林德曼给出了 π 是超越数的严格证明。

如今现代计算机已能计算 π 的任意多位，较详细的叙述可参阅本书 4. 圆周率记趣。

自然对数的底“e”：作为数学符号最先是由欧拉在 1727 年使用的。这正是 Eular 名字的第一个字母，后来人们确定用 e 来作为自然对数的底，以此来纪念欧拉。以 e 为底的对数其所以叫自然对数是因为它能反映自然界规律的函数关系，因此在自然科学中，e 的作用不亚于 π，在微积分中，以 e 为底时公式具有最简洁的形式。

虚数单位“i”：i 来源于解二次方程 $x^2+1=0$，是 -1 的平方根，$i=\sqrt{-1}$ 这个记号是 1777 年由欧拉首先使用的。魏塞尔、高斯、阿甘等数学家不再死钻一维数轴的牛角尖，发散思维使他们想到用另一根数轴（虚轴）来表示“i”，于是复数获得了一块坚实的大地——复平面，现已成为一门庞大的数学分支——复变函数论的基石。

直至今天，虚数仍然在磨砺人们的抽象思维能力。它的许多迷人的性质是难于用对实数的理解去解释的，比如 i^i（i 的 i 次方）这个数是虚数还是实数？凭直观是难以得出结论的。又是欧拉第一个证明了 i^i 是实数，它的值 $i^i=e^{-\frac{\pi}{2}}=0.2078795763\cdots$ 是一个无理数，并由此可知 $i^{-i}=e^{\frac{\pi}{2}}$，$\sqrt[i]{i}=i^{\frac{1}{i}}=i^{-i}=e^{\frac{\pi}{2}}=4.8104773809\cdots$ 即 i^{-i} 与 $\sqrt[i]{i}$ 也都是实数。而欧拉公式 $e^{i\pi}=-1$ 正是通向这些奇特境地的一座桥梁。

40.2 $V+F-E=2$

这是一个关于多面体的公式，其中 V 是多面体的顶点数，F 是多面体的面数，E 是多面体的棱数。

这是一个迷人的公式，因为多面体（由几个平面所包围的立体图形）太多了，要多少有多少！而欧拉却能由众多的多面体（指凸多面体）中对它们的顶点、面和棱得出如此简洁的关系式，怎不让人叹服！那么这个公式是怎样发现的呢？——是观察、归纳、猜想，最后检验、证明而得出的。

(1) 面的数目 F 是否随同顶点数目 V 的增大而增大？答案是否定的，如图 40-1、图 40-2 和表 40-1。

(2) 棱数 E 是否随面数 F 或顶点数 V 增大而增大？如图 40-2～图 40-5 和表 40-2、表 40-3。

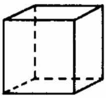

图 40-1

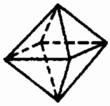

图 40-2

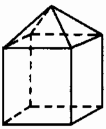

图 40-3

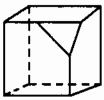

图 40-4

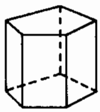

图 40-5

表 40-1

	八面体	正方体	增减
V	6	8	增大
F	8	6	减小

表 40-2

	塔顶体	截角立方体	增减
V	9	10	增大
E	16	15	减小

表 40-3

	五棱柱	八面体	增减
F	7	8	增大
E	15	12	减小

(3) 随着棱数 E 增大，顶点数 V 和面数 F 是否联合增大？经检验答案是否定的。并且发现了更准确的规律，就是全满足如下的关系式 $V+F-E=2$。

(4) 提出猜想："对于任何一种多面体，顶点数 V 加面数 F 都等于它的棱数加 2。"

(5) 通过构图，发现答案是否定的，如图 40-6。

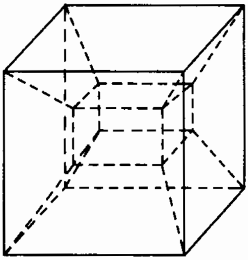

图 40-6

(6) 修正："对于任何凸多面体的顶点数 V，面数 F 和棱数 E 都满足如下的关系式 $V+F-E=2$。"

当然，确定了 (6) 的猜想后还应予以逻辑证明（如数学归纳法），因篇幅关系这里从略。著名的数学教育家波利亚说得好："欧拉在以下这几点几乎是独特的。他总是下功夫把有关的归纳证据细心地、详尽地、有条有理地写出来，他讲得令人心悦诚服，但只是如实反映他的思想；他的讲解能表述那些使他引向发现的思想，而又有一种特别感人的魅力。"