39 神奇的幻方

幻方的历史悠久。相传三千多年前的大禹治水时，有神龟出自洛水，龟背上刻有神奇的图案，称为“洛书”，洛书实际是一个三阶幻方，由于洛书是九个数组成，故称为“九宫”。

我国的少数民族如藏族和纳西族都曾有“九宫图”，有诗赞美九宫：

四海三山八洞仙，九龙王子一枝莲。

二七六郎赏月半，周围十五月团圆。

“九宫算”在汉代以后有很大发展，成为纵横都为 n 行共 n^2 个数的图，又称“纵横图”。公元 15 世纪，住在君士坦丁堡的摩索普拉把我国的纵横图介绍到欧洲，并取名为“幻方”。由于幻方有着变幻莫测的性质，所以“幻方”一词便逐渐为世人所接受。16 世纪德国著名画家有一幅名为“忧郁”的铜版画，画中有一个四阶幻方，我国也曾出土过一个元代的铁质四阶幻方。

虽然幻方的历史已很长了，但由于幻方中出现的一种变幻莫测的神奇的数字之美，使人流连忘返，甚至有人用毕生的精力去研究幻方，因而，随着时间的流逝，不断有人创造出新奇巧妙的幻方。

39.1 神奇的幻方世界

1. 洛书

如图 39-1 由九个数字组成，又称“九宫”。

2	9	4
7	5	3
6	1	8

图 39-1

2. 丢勒在《忧郁》中刻的四阶幻方

如图 39-2，有趣的是，在幻方的最下一行中巧妙地嵌入了创作的年号 1514，表明了创作年号。

3. 印度太苏神庙历碑上的幻方

如图 39-3，刻于 11 世纪，这个幻方上的每行、每列和每条对角线上四数和均为 34，奇怪的是如果把幻方边上的行或列挪到另边去，新得的仍是幻方。

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

图 39-2

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

图 39-3

4. 欧拉幻方

如图 39-4 每行或每列数之和为 260，半行或半列之和为 130，更妙的是一个国际象棋中的象可以按照它的步法依自然数顺序从 1 走到 64。

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

图 39-4

5. 双料幻方

如图 39-5。在幻方中，最奥妙最为壮观的莫过于“双料幻方”了。这是一个八阶幻方。它的

每行每列和每条对角线上的八个数不仅其和相等（都等于 840）；而且这八个数的乘积也相等（都等于 2058068231856000）。由于这种幻方的数字之和与数字之积都分别相等，故称为“双料幻方”，真可谓是天工造物，不知当初人们是怎样想出来的！

46	81	117	102	15	76	200	203
19	60	232	175	54	69	153	78
216	161	17	52	171	90	58	75
135	114	50	87	184	189	13	68
150	261	45	38	91	136	92	27
119	104	108	23	174	225	57	30
116	25	133	120	51	26	162	207
39	34	138	243	100	29	105	152

图 39-5

6. 一个中国幻方

一个中国幻方已有近 400 年的历史，将其译成阿拉伯数字如图 39-6。

27	29	2	4	13	36
9	11	20	22	31	18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28	6	15	17	26	19
1	24	33	35	8	10

图 39-6

7. 地砖幻方

如图 39-7 是欧洲某博览会大厅的地砖的数字，这里任意一个 5×5 的正方形都构成一个五阶幻方。

1	15	24	8	17	1	15	24	8	17	1	15	24	8	17
23	7	16	5	14	23	7	16	5	14	23	7	16	5	14
20	4	13	22	6	20	4	13	22	6	20	4	13	22	6
12	21	10	19	3	12	21	10	19	3	12	21	10	19	3
9	18	2	11	25	9	18	2	11	25	9	18	2	11	25
1	15	24	8	17	1	15	24	8	17	1	15	24	8	17
23	7	16	5	14	23	7	16	5	14	23	7	16	5	14
20	4	13	22	6	20	4	13	22	6	20	4	13	22	6
12	21	10	19	8	12	21	10	19	8	12	21	10	19	3

图 39-7

8. 同心幻方

同心幻方也叫嵌套幻方，其特点是从中心向外辐射。例如图 39-8 是一个七阶幻方。如果剥掉外层就成了一个五阶幻方；再剥掉外层，就成了一个三阶幻方。奇数阶同心幻方正好有一个“中心”。造法很多，其本质都是由最简幻方“洛书”领悟过来的。

4	9	8	47	48	49	10
38	15	18	36	37	19	12
39	30	22	29	24	20	11
43	33	27	25	23	17	7
6	16	26	21	28	34	44
5	31	32	14	13	35	45
40	41	42	3	2	1	46

图 39-8

9. 间隔幻方

日本幻方研究家片桐制作了一个特别奇妙的“间隔幻方”，如图 39-9，它不但完全符合八阶幻方的定义，更奥妙的是，如果把其中数字逐个间隔地取出来，重新配置，则可得到以下两个四

1	35	24	54	43	9	62	32
6	40	19	49	48	14	57	27
47	13	58	28	5	39	20	50
44	10	61	31	2	36	23	53
22	56	3	33	64	30	41	11
17	75	8	38	59	25	46	16
60	26	45	15	18	52	7	37
63	29	42	12	21	55	4	34

图 39-9

阶幻方，如图 39-10、图 39-11。不但对角线上，而且在折断了的“泛对角线”上任意四数之和（例如 47+3+18+62=22+45+43+20）全都等于 130。

1	24	43	62
47	58	5	20
22	3	64	41
60	45	18	7

图 39-10

35	54	9	32
13	28	39	50
56	33	30	11
26	15	52	37

图 39-11

10. 素数幻方

要用素数造出一个幻方已非容易，要用连续素数造出一个幻方就更难。世界数学科普大师马丁·加德纳就曾悬赏奖给第一个用连续素数造出一个三阶幻方的作者。为时不久，一个叫哈里·纳尔逊的利用加利福尼亚大学的一台克雷超级计算机，通过巧妙的程序设计，一举解决了这个难题，并提供了 22 个解答，其中一个如图 39-12。因为幻方专家早已指出了三阶幻方通式，而这些素数正好可以完全纳入该通式的范畴中去。

1480028201	1480028128	1480028183
1480028153	1480028171	1480028189
1480028159	1480028213	1480028141

图 39-12

11. 六角幻方

1910 年，美国有一个铁路公司职员阿当斯是一名幻方的业余爱好者，他渴望能造出一个阶数为三的六角幻方。历经 47 个春

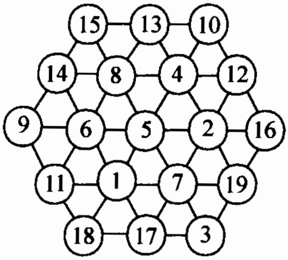

图 39-13

秋，经过无数次的挫折和失败，无情的岁月已将他从一个小伙子变成了一个双鬓斑白的老人，终于找到了六角幻方，如图39-13。数学游戏专家特里格得知后，企图在阿当斯的基础上，对层数作出突破，但经过反复研究，发现都是徒劳的，即两层以上的六角幻方不存在。如今，已用计算机证明六角幻方也只有阿当斯构造的这一个，难怪阿当斯为此花了47年的时光!

12. 六角星形幻方

如图 39-14 幻方的每一直线上四个数之和均为 26，而六个角上的数字之和也是 26，这一幻方虽然简单，但不乏趣味，可使人赏心悦目。

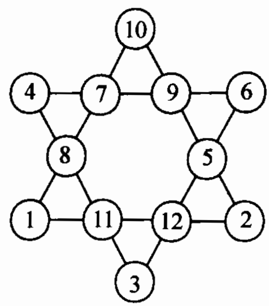

图 39-14

13. 反幻方

就是它的每一行，每一列或对角线上数字之和都不相等。这就是反幻方的问题。马丁·加德纳终于找到了这种幻方，如图39-15。有趣的是，反幻方中的九个数竟然形成按序首尾相连的“一条龙”。

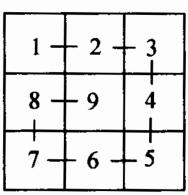

图 39-15

我们列举了以上 13 种幻方已经是让人眼花缭乱，惊异不已了。幻方像是数学里的“百慕大三角”，这绝非是什么数字游戏，而是竭尽智力的

结晶。如果将幻方从平面推广到空间，就有所谓的“幻立方”，即将1至n^3个自然数填入n^3个小立方体，使立方体的每个剖面正方形上的每行、每列、每条对角线上各数的和都等于同一个常数，“幻立方”也有人在着手研究，但难度要比幻方问题大得多。

39.2 幻方的一些性质

幻方的“幻”，就在于它具有令人迷惑的性质。现列举一些性质如下：

(1) 每行、每列及对角线上数的和为同一个常数，这个常数称为“幻方常数”。幻方常数$=n$阶幻方中n^2个自然数之和$\div n$，如n阶幻方是由自然数1，2，3，…，n^2构成，则幻方常数$=\frac{1}{2}n\ (n^2+1)$。

(2) 在同一行、同一列或同一对角线上与中心等距离的两个数之和，等于中心数的两倍。

(3) 把一个幻方的每一个数都加上或都乘以同一个常数，所得的仍是一个幻方。

(4) 把与中心等距离的两行及两列交换，所得结果仍是一个幻方。

此外，幻方还有许多有趣的性质，不一一列举了。还有幻方是如何构造的？同一阶数的幻方有多少种？等等。这些问题是一门新兴数学学科——组合数学研究的课题，等待有兴趣的读者去探索研究。