35 考考您的智力

苏联学者加里宁说过："数学是锻炼思维的体操。"好的数学问题能锻炼思维、发展智力、扩大视野、提高能力，增加学习数学的兴趣。如果您能积极地投入，您会觉得数学并非是枯燥无味的，而会使您兴趣盎然。有人说过数学是一座大花园，会被其中的美沉迷而流连忘返。

下面我们提供几道饶有兴趣的问题来启发您的智力。首先您不妨自己先思考，能否有新颖而简洁的解法，实在想不出来，方可去看文章中所提供的答案。同时也可将您的解法与文章中的解法加以对比看看谁的解法更新颖更简洁。

35.1 不通过计算，求出两相似图形的面积比

图 35-1 中的大正方形面积是小正方形面积的几倍？图 35-2中大三角形的面积是小三角形面积的几倍？请您不通过计算给出答案。

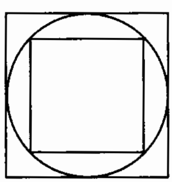


图 35-1

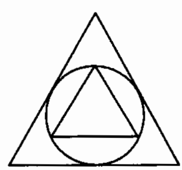


图 35-2

35.2 在逻辑排列中，图 35-3、图 35-4 的右下角应填什么图形

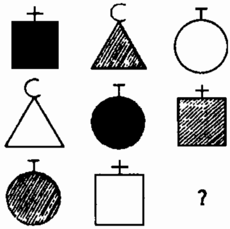


图 35-3

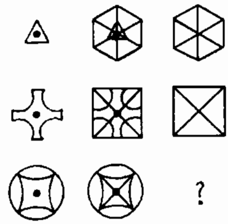
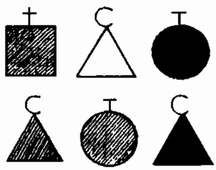
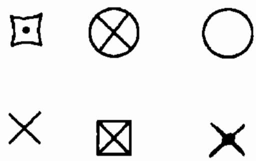


图 35-4



选择答案



选择答案

35.3 到底转了几圈

如图 35-5、图 35-6，桌子上紧挨着放着两枚同样大小的硬币。它们外切于 A 点，C_1 固定不动，C_2 沿着 C_1 币外缘无滑动地滚动，C_2 币滚动一周后，C_2 币与 C_1 币又仍相切于 A 点。问 C_2 币自转了几周?

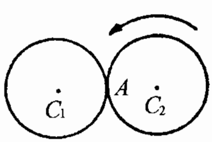


图 35-5

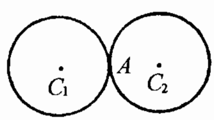


图 35-6

35.4 三用瓶塞

某人收集了三只瓶子，它们的瓶口形状分别如图 35-7 中的（a)、(b)、(c)。现在他想只做一只瓶塞，对三个瓶子都能适用，请您帮他设计一下。

(未学过立体几何的读者不妨用切削萝卜来试试)

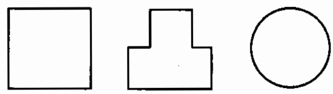


图 35-7

35.5 大小圆周一样长（亚里士多德诡辩）

如图 35-8 在轮子上有两个同心圆，轮子滚动了一周，大圆上的点 A 平移到了点 A'，小圆上的点 B 平移到了点 B'，显然 $AA' = BB'$，这不说明了大圆周长等于小圆周长吗？那么问题出在哪里？

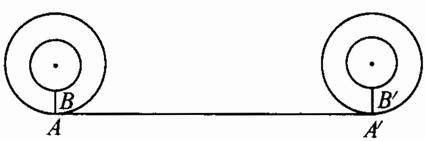


图 35-8

35.6 曲线等分正三角形面积

用什么曲线将一个正三角形分为两面积相等的部分，并使

曲线的长最短（如图 35-9）?

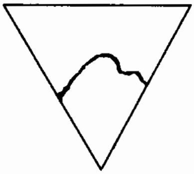


图 35-9

35.7 组合多面体有几个面

如图 35-10，“一个正三棱锥和一个正四棱锥，所有的棱长都相等，问重合一个面后的组合体共有多少个面?”

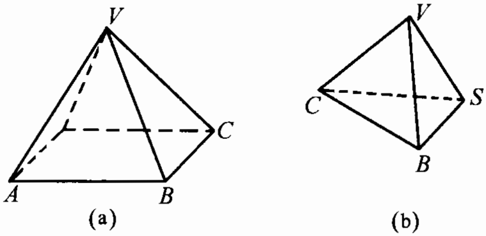


图 35-10

这是美国一道竞赛题，1982 年在美国佛罗里达州举行的一次有 83 万学生参加的全国初级学术能力测试题。标准答案是 7 个面（因为 5 + 4 − 2，就是等于 7)。然而这个答案被一个叫丹尼尔的学生发现是错的，您想一想究竟为什么？（未学过立体几何的读者若想不出来，不妨做两个模型。)

35.8 自鸣得意的学者解方程

某学者见到一道解方程的题：$x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}$说道："这还不容易，只需将这个方程脱了根号，变成一个四次方程去解，不就行了。"聪明的读者，您能不解四次方程就作出这道题吗？

35.9 三等分圆面积

如果让您将一个圆的面积三等分，您很容易想到只需将以圆心为顶点的圆周角分成三个120°的圆心角，那么这三个角的边自然将圆面积三等分了。但如果有人问您，您最多有几种方法将圆面积三等分时，恐怕得要费一番脑子了！

下面我们来给出这几道题的解答。也许有些解法会让您"拍案叫绝"，有些结论会出乎您的意料，也许您可从中得到某种启迪，而对数学更感亲切、更有兴趣。

（1）只需将小正方形转90°，将小三角形转60°（如图35-11、图35-12），就可看出大正方形面积是小正方形面积的两倍，大三角形面积是小三角形面积的四倍。

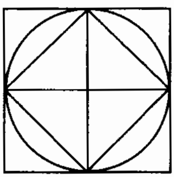


图 35-11

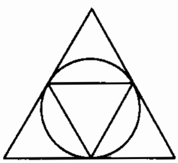


图 35-12

（2）图 35-3 中每一行都有黑、阴影、白三种色和正方形、三角形、圆三种图形。故知第三行的最后一个图形应是黑三角形“▲”；图 35-4 中第二列图形是由第一列图形与第三列图形重叠而成的，故第三行的最后一个图形应是一个“ ×”。

（3）C_2 硬币应转了两圈。因 C_2 与 C_1 起始时相切于 A，如果在转动过程中 C_2 币的 A 点一直与 C_1 接触（即滑动），这时当 A 回到原来位置时，C_2 币已自转了一圈，如果 C_2 币绕 C_1 币作无滑动的滚动一周，则 C_2 币已自转两圈了。

（4）先找一个正方体，使侧面正好与瓶口（a）相配；然后将它削去左上方与右上方部分，使它与瓶口（b）相配；再削圆使其与瓶口（c）相配；最后得到的立方体便是可用的瓶塞了（如图 35-13）。该题与三视图知识有关。

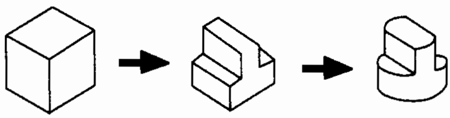


图 35-13

（5）这个结论显然是错误的。其错误在于：当轮子滚动一周时，大圆作无滑动的纯滚动，所以 AA' 是大圆周的长；而小圆确实连滚动带滑动（可参看第三题答案），因而 BB' 大于小圆的周长，因此虽然 $AA' = BB'$，并不能推出大圆周长等于小圆周长。这个诡辩是由公元前 3 世纪亚里士多德提出来的，故称亚里士多德诡辩。

（6）我们取定此等边三角形的一个顶点，然后以过顶点的两边为轴，把这个等边三角形连同等分它的曲线反转 5 次，形成一正六边形。在正六边形内有一条封闭的曲线， 把正六边形二等分（如图 35-14）。因为要求曲线最短，故此曲线必为圆（如图 35-15）。所以这条曲线是以我们取的顶点为圆心的一个圆。

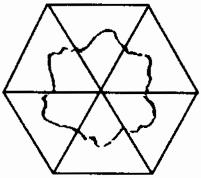


图 35-14

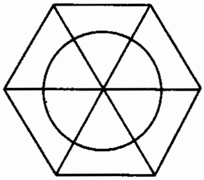


图 35-15

我们还可以进一步求出这个圆的半径长。

设正六边形边长为 a，则正六边形的面积为

$$S_{正六边形}=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

所以圆面积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$。故有

$$\pi R^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2,\quad \therefore R=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}}a\approx 0.64a$$

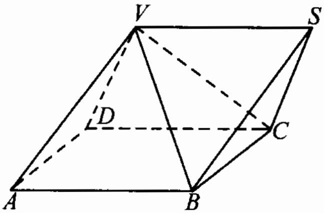


图 35-16

(7) 实际只有 5 个面。这是因为正三棱锥两个侧面所成的二面角与正四棱锥的两个侧面所成的二面角之和为 180°(证略)。这只需做两个模型实验便可知道了（如图 35-16)。

(8) 完全可以不用像那位学者所说的“解四次方程”，一样可以求出此方程的解：

设 $a=\sqrt{x-\frac{1}{x}},\quad b=\sqrt{1-\frac{1}{x}}$,则

$$a+b=x \tag{35.1}$$

因为 $x\neq0$,所以 $a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}=$

$$\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)-\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x}=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}$$

即 $$a-b=1-\frac{1}{x} \tag{35.2}$$

(35.1)+(35.2)式,得: $2a=x-\frac{1}{x}+1=a^2+1$

所以,有 $a^2-2a+1=0$,得 $a=1$

即 $x-\frac{1}{x}=1, x^2-x-1=0$

解得 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

经检验 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$是原方程的根

(35.1)、(35.2) 两式称为对偶式。对偶也是一种对称,这种解法也体现了一种对称、和谐的美。

(9) 除了如图 35-17 三等分圆外, 如图 35-18 的 9 个图形都是将圆面积三等分法。岂不让您大开眼界。

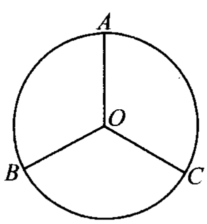


图 35-17

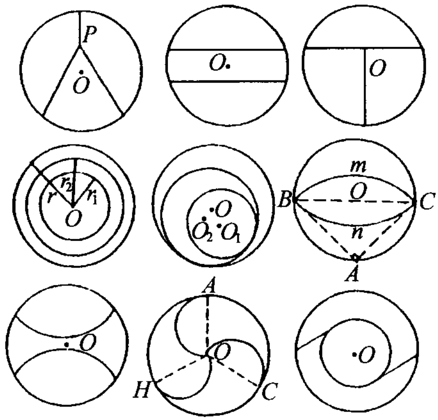


图 35-18