36 巧妙、有趣、优美的等式

36.1 巧妙而正确的等式

有一些运算，在恒等变换时，看似“奇怪”而“荒谬”，但结果却是正确的，您不相信，请看看以下几个不同寻常的演算。

1. 可“约去”指数的等式

如果有学生在做数学演算时，作出以下的演算

$$\frac{5^3+2^3}{5^3+3^3}=\frac{5+2}{5+3}=\frac{7}{8}$$

$$\frac{7^3+3^3}{7^3+4^3}=\frac{7+3}{7+4}=\frac{10}{11}$$

$$\frac{432^3+321^3}{432^3+111^3}=\frac{432+321}{432+111}=\frac{753}{543}=\frac{251}{181}$$

粗心的老师一定会在他的作业本上划一个大“×”号。而学生看了不服气,过来跟老师说他做的是对的,老师不相信做了几遍,发现学生做的这个等式是正确的。如果是“碰巧”,怎会几个等式都会这样“碰巧”呢?

如果仔细观察式子个数的特点,我们就可以作出如下的猜想

$$\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}=\frac{a+b}{a+(a-b)}$$

看看是否能证明呢?

$$\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}$$

$$=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{[a+(a-b)][a^2-a(a-b)+(a-b)^2]}$$

$$=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{[a+(a-b)](a^2-ab+b^2)}=\frac{a+b}{a+(a-b)}$$

事实上，只需将 a,b 代入不同的实数(不一定是整数)都可以得出以上类似的结果。而这个运算好像是把等式左边分子、分母上的指数约掉了一样。

2．可“约去”对数符号的等式

如果说$\frac{\lg 2}{\lg 4}=\frac{2}{4}$，$\frac{\lg\frac{9}{4}}{\lg\frac{27}{8}}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{27}{8}}=\frac{2}{3}$，您相信吗？

事实上，上面的等式是对的。这是因为，恒等式

$$\frac{\lg\left(\frac{m+1}{m}\right)^m}{\lg\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}}=\frac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^m}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}}$$

是对的。证明如下：左式$=\frac{m}{m+1}\cdot\frac{\lg\left(\frac{m+1}{m}\right)}{\lg\left(\frac{m+1}{m}\right)}=\frac{m}{m+1}$；右式$=\left(\frac{m+1}{m}\right)^{-1}=\frac{m}{m+1}$。

当 $m=1$、2 时，便是上面的两个等式，它们好像是将分子、分母中的对数符号约去了一样。

3．两数积等于两数和的等式

我们说 $\frac{8}{7}\times 8=\frac{8}{7}+8$，$\frac{11}{10}\times 11=\frac{11}{10}+11$，这不是很神奇吗？

事实上，等式 $\frac{n+1}{n}\times(n+1)=\frac{n+1}{n}+(n+1)$是成立的。因为

$$左式=\frac{(n+1)^2}{n}，右式=\frac{(n+1)+n(n+1)}{n}=\frac{(n+1)^2}{n}$$

所以当 $n=7, 10$ 时，便是以上的两个等式了。

4. 可把代分数的整数部分提到根号外的等式

请看等式 $\sqrt{5\frac{5}{24}}=5\sqrt{\frac{5}{24}}$，$\sqrt{7\frac{7}{48}}=7\sqrt{\frac{7}{48}}$，$\sqrt{10\frac{10}{99}}=10\sqrt{\frac{10}{99}}$，这不是把代分数的整数部分提到根号外了吗？这些等式是否成立呢？这要看下面的等式是否成立了

$$\sqrt{a+\frac{a}{a^2-1}}=a\sqrt{\frac{a}{a^2-1}}$$

因为左边 $=\sqrt{\frac{a^3-a+a}{a^2-1}}=\sqrt{\frac{a^3}{a^2-1}}=a\sqrt{\frac{a}{a^2-1}}=$ 右边，这说明等式是成立的，因此，只需令 $a=5, 7, 10$，便可得到前面的三个等式。事实上，对上面的等式还可推广为

$\sqrt[n]{a+\frac{a}{a^n-1}}=a\sqrt[n]{\frac{a}{a^n-1}}$（$n$ 可为大于 1 的任意自然数）（证略）

因而，下面的等式也是成立的：

$$\sqrt[3]{5\frac{5}{124}}=5\sqrt[3]{\frac{5}{124}}，\sqrt[4]{3\frac{3}{80}}=3\sqrt[4]{\frac{3}{80}}，\sqrt[5]{3\frac{3}{242}}=3\sqrt[5]{\frac{3}{242}}$$

对于公式中的 a 并非只能取正整数，对于取任意实数都是成立的。

5. 指数可交换的等式

当 $a\neq b$ 时，一般说来是 $a^2+b\neq a+b^2$ 的，然而下面的等式是成立的，您相信吗？

$\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{5}{6}=\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2$, $\left(\frac{1}{9}\right)^2+\frac{8}{9}=\frac{1}{9}+\left(\frac{8}{9}\right)^2$, $\left(\frac{1}{100}\right)^2+\frac{99}{100}=\frac{1}{100}+\left(\frac{99}{100}\right)^2$, …

这就看等式$\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$是否成立了?

$\because \left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n^2}+\frac{n^2-n}{n^2}=\frac{n^2-n+1}{n^2}$

而$\frac{1}{n}+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2=\frac{n}{n^2}+\frac{n^2-2n+1}{n^2}=\frac{n^2-n+1}{n^2}$

$\therefore$ 有等式$\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$成立。

如果令 $n=6,9,100$,不就是前面的三个等式吗?

事实上,下面推广的等式也是成立的

$\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{a-b}{a}=\frac{b}{a}+\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$,其中 a、b 可为任意实数,这是因为

$$左边=\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2-ab}{a^2}=\frac{a^2-ab+b^2}{a^2}$$

$$右边=\frac{ab}{a^2}+\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2}=\frac{a^2-ab+b^2}{a^2}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{a-b}{a}=\frac{b}{a}+\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$$

因而我们又可构造出一系列的等式

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2+\frac{2}{7}=\frac{5}{7}+\left(\frac{2}{7}\right)^2$$

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{4-\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+\left(\frac{4-\pi}{4}\right)^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\frac{3-\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

如果 a 是大于 0 且小于 1 的实数,则显然有

$$a^2+(1-a)=a+(1-a)^2$$

因为它与等式$\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$是等价的(其中 n 是大于 1 的正实数)。

从以上几个看似“荒谬”然而却是正确的等式中,可以看出在特定的条件下,代数式可能呈现出一些不合常态的有趣规律。如果您在代数式的运算中认真观察,您也可以发现一些不同一般的有趣等式,这对提高您的观察、归纳、推理能力,将是很有益的。

6. 三角函数的和积等式

不仅在代数式中有一些“荒谬”的等式,就是在三角函数中也有着“出人意料”的等式。

请看下面的等式

$$\sec^2 38^\circ \csc^2 38^\circ=\sec^2 38^\circ+\csc^2 38^\circ$$

同样使人感到出人意料。然而如下的证明是正确无误的。

$$\begin{aligned}\sec^2 x\csc^2 x&=\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\\&=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x+\csc^2 x\end{aligned}$$

事实上,还可以找到很多这样类似的恒等式

$$\tan^2 x\sin^2 x=\tan^2 x-\sin^2 x$$

$$\cot^2 x\cos^2 x=\cot^2 x-\cos^2 x$$

……

36.2 一串有趣的等式

由恒等式

$$[3(10^k+10^{k-1}+\cdots+10+1)n+1]^2$$

$$=n^2(10^{2k+1}+10^{2k}+\cdots+10^{k+1})+(6n-n^2)(10^k+10^{k-1}+\cdots+10+1)+1$$

可以导出两组有趣的等式：

(1)当 $n=1,k=1,2,3,4\cdots$时，有

$34^2=1156,334^2=111\ 556,3334^2=11\ 115\ 556,$

$33\ 334^2=1\ 111\ 155\ 556,\cdots$

(2)当 $n=2,k=1,2,3,4\cdots$时

$67^2=4489,667^2=444\ 889,6667^2=44\ 448\ 889,$

$66\ 667^2=4\ 444\ 488\ 889,\cdots$

36.3 优美的算式与优美的答案

1. 请看算式

$$\frac{999\ 999\ 999\times 999\ 999\ 999}{1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1}$$

它整齐、匀称、和谐、平衡，给人以美的感受，使人对它感兴趣。易知分式的分母为 9×9，于是，知分式的结果

$$111\ 111\ 111\times 111\ 111\ 111=12\ 345\ 678\ 987\ 654\ 321$$

这个答案显然具备分式的特点，使人感到惊奇。

事实上，您只需在上述算式中改变一个数字，会有类似的结果

$$\frac{88\ 888\ 888\times 88\ 888\ 888}{1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1}$$

$=11\ 111\ 111\times 11\ 111\ 111=123\ 456\ 787\ 654\ 321$

您如果认真进行观察、归纳，是不难写出它们的一般形式的。

2. 如果让您计算下式

$$\frac{1}{1+x^{c-b}+x^{c-a}}+\frac{1}{1+x^{b-a}+x^{b-c}}+\frac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}}$$

您如果将三个分母相乘通分后再相加，则将是不胜其烦的，但如果您注意到原式是一个关于 a,b,c 的轮换对称式，其分母也应是关于 a,b,c 轮换对称式，便可得到以下的两种简便解法，想不到这三个复杂式子的和竟然是一个简单的数 1。

解法 1

$$原式=\frac{x^{a+b}}{x^{a+b}+x^{b+c}+x^{a+c}}+$$

$$\frac{x^{c+a}}{x^{a+b}+x^{b+c}+x^{c+a}}+\frac{x^{b+c}}{x^{a+b}+x^{b+c}+x^{c+a}}=1$$

解法 2

$$原式=\frac{x^{-c}}{x^{-c}+x^{-a}+x^{-b}}+$$

$$\frac{x^{-a}}{x^{-c}+x^{-a}+x^{-b}}+\frac{x^{-b}}{x^{-c}+x^{-a}+x^{-b}}=1$$

算式的对称、和谐与答案的简单融为一体。

无论是“荒谬”的等式，还是优美算式的等式，都体现了这些等式巧妙结构本身所具有的对称、和谐和奇异的内在美，恒等变换是一种平淡无奇、枯燥无味的运算，只要认真钻研，您会感到趣味无穷的，说不定您还会发现一些奇异的等式呢!