

32 迷人的平面镶嵌

平面镶嵌就是用同样形状的平面几何图形无缝隙又不重复地铺满整个平面。在数学中与此有关的镶嵌理论是一个饶有兴趣的课题，对用多边形来镶嵌平面所构造出的各种精美图案的欣赏，让人赏心悦目、心旷神怡。

从让人眼花缭乱、扑朔迷离的平面镶嵌中可归纳出以下几种不同的镶嵌。

32.1 相同正多边形镶嵌

要用同样大小的正多边形镶嵌平面，正多边形应具备的条件是：每一个公共顶点处，几个多边形的顶角和恰好等于 360° ，而正 n 边形的一个内角等于 $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$ ，要使得共顶点的 m 个内角和为 360° ，即需要 $m \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = 360^\circ$ ，即 $m = 2 + \frac{n}{n-2} (*)$ 。

注意其中的 m 和 n 必须同时都是正整数且 n 不能小于 3，易知在不定方程 $(*)$ 中，只有以下三组解： $n = 3$ 时，得 $m = 6$ ； $n = 4$ 时，得 $m = 4$ ； $n = 6$ 时，得 $m = 3$ 。

所以在正多边形中，只有正三角形、正方形、正六边形才能镶嵌整个平面，如图 32-1、图 32-2、图 32-3。

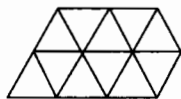


图 32-1

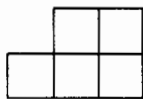


图 32-2



图 32-3

32.2 几种不同正多边形的镶嵌

(1) 每个顶点都是同样数目的一些同样形式的多边形的公共点。因为一个正 n 边形的每个内角为 $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) \cdot 360^\circ$ 。所以要作出均匀的镶嵌图案, 就必须找出一些正整数 n, p, q, \dots , 使它们满足下列等式

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) + \dots = 1$$

由这个式子可以得出 17 组不同的解, 也就是 17 种不同的图案, 但其中只有 11 种能镶嵌整个平面, 其中三种即是前面所介绍的正三角形、正方形、正六边形。其他八种是如图 32-4 至图 32-11。

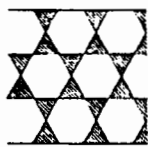


图 32-4

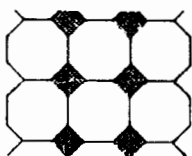


图 32-5

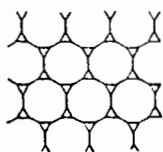


图 32-6

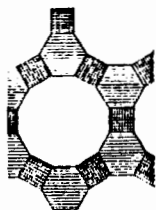


图 32-7

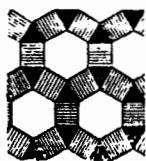


图 32-8

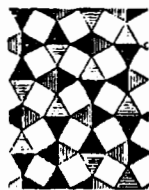


图 32-9



图 32-10

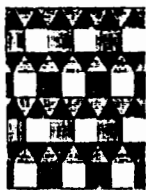


图 32-11

(2) 不要求每个顶点都是同样数目和同样形状的多边形顶点。如果不加这样的限制，我们将会得到更加绚丽多姿的镶嵌图案（如图 32-12 至图 32-15）。

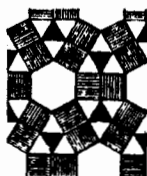


图 32-12

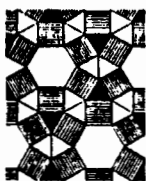


图 32-13

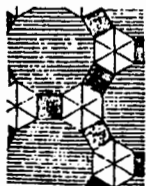


图 32-14

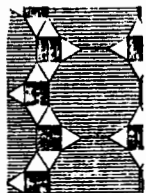


图 32-15

32.3 一般凸多边形（非正多边形）的平面镶嵌

对于非正多边形的平面镶嵌，近些年来发现有如下的结果：

- (1) 三角形都可以镶嵌一个平面（如图32-16）。

(2) 任何凸四边形都可以镶嵌一个平面 (如图32-17)。



图 32-16

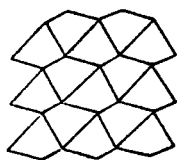


图 32-17

(3) 对于凸五边形, 只有特定的凸五边形方可以镶嵌一个平面 (如图 32-18、图 32-19), 尤其图 32-19 是一种难以想出的五边形平面镶嵌。

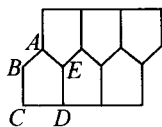


图 32-18

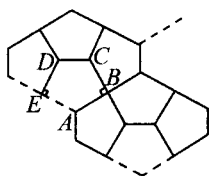


图 32-19

(4) 对于凸六边形, 也只有特定的凸六边形 (三组对边平行) 才可以平面镶嵌 (如图 32-20、图 32-21), 尤其是图 32-21可以镶嵌出“花瓣形”图案。

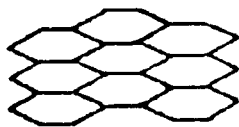


图 32-20

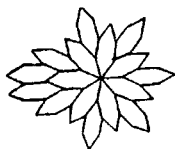


图 32-21

32.4 凹多边形的平面镶嵌

以上我们考虑的多边形都是凸多边形。如果去掉这个限制，则凹多边形也可镶嵌出各种赏心悦目的图案来，图 32-22 便是四种常见简单的凹多边形镶嵌的图案。

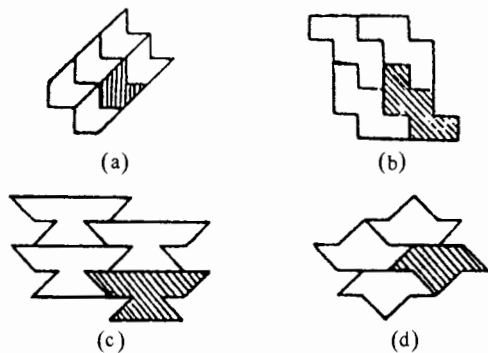


图 32-22

32.5 重复花样图形的镶嵌

就是用几个同样的图形拼出一个与它相似的大的图形。我们称具有这种性质的图形为重复花样，具有重复花样的图形包括凸多边形（如图 32-23）和凹多边形（如图 32-24）。

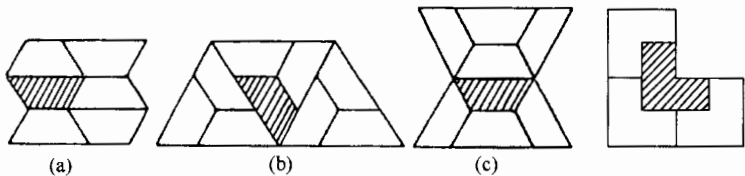


图 32-23

图 32-24

32.6 几种精彩的平面镶嵌

1. 黑白图案的平面镶嵌

如图 32-25，该图案黑白对等表现出无比的精彩。

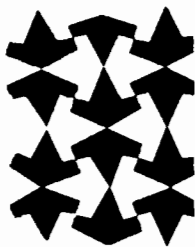


图 32-25

2. 变形矩形的平面镶嵌

在矩形的一条长边上作改变，再把这种改变平移到另一条长边上，然后在它的短边上作改变，再把这种改变平移到另一条短边上，如图 32-26，则所得的图形可镶嵌整个平面，如图 32-27，就像一群奔驰的羊群。

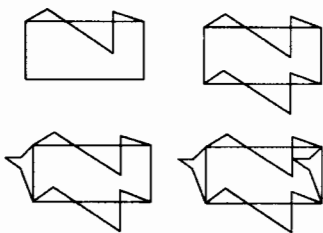


图 32-26

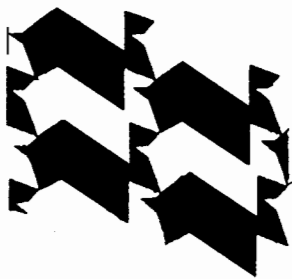


图 32-27

3. 曲边形的平面镶嵌

如图 32-28，这一幅简单而雅致的花样图案地面出现在罗马的卡拉卡拉澡堂内。平面镶嵌不仅可用于地砖铺地面，而且在建筑结构、经济截料、废物利用等方面有着很大的实用性。对镶嵌平面理论的研究，可将您带入一个五彩缤纷、绚丽多姿

的美的世界，只要您能潜心研究，也可以设计出一组别出心裁、简洁优美的图案来。

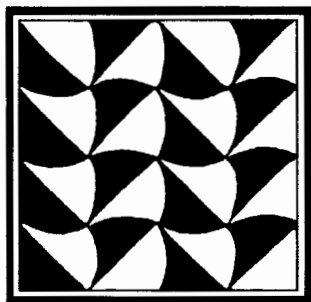


图 32-28