31 奇妙的分形世界

如果让您考虑一个这样的问题："具有有限面积的平面图形，其周长是有限的，还是无限的呢?"您会毫不犹豫地说："当然周长也是有限的。"

我们在中学学的平面几何是欧几里得几何，长期以来，人们总是用欧几里得几何的对象和概念（诸如点、线、平面、三角形、正方形、圆）来描述我们生存的这个世界。然而在1906年瑞典数学家科克作了一条"雪花曲线"，它的面积是有限的，然而它的周长是无限的。

31.1 雪花曲线

先作一个等边三角形（如图31-1），再把每边三等分，将居中的1/3部分向外作一个小等边三角形，并把每一个小等边三角形的底抹掉，得到一个六角星形（如图31-2）；再在六角星形的每一条边上以同样的方法向外作出更小的等边三角形，

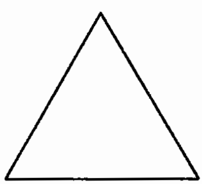


图31-1

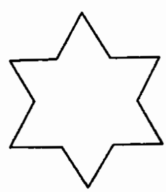


图31-2

于是曲线变得越来越长，开始像一片雪花了（如图31-3）。再如此作下去，曲线将变得越来越长，图形也更美丽（如图31-4）。如果不断地作下去，则曲线可以要多长有多长，若无限地

如此作下去，自然就有无限周长了。

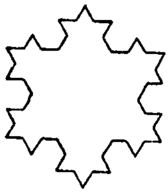


图 31-3

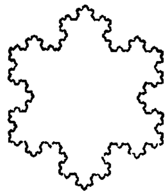


图 31-4

意大利数学家欧内斯托·切萨罗曾对科克雪花曲线作过如下描述：

这个曲线最使我们注意的地方是任何部分都与整体相似。这个结构的每一个小三角形包含着一个适当比例缩小的整体形状。这个形状包含着每一小三角形的缩小形式，后者又包含缩得更小的整体形状，如此下去以致无穷。就是这个在它所有的无论怎样小的部分都保持着相似的性质，使这曲线看上去是如此的奇妙。要是它在现实中出现，那就必须把它完全除去才能摧毁它。否则的话，它将会从它的三角形的深处重新不停地生长起来，就像宇宙本身一样。

31.2 雪花曲线面积的计算

“雪花曲线”周长是无限的，而面积却是有限的。到底它的面积是多少呢？下面我们作出推导：

设原三角形的面积是 1，雪花曲线的产生过程中各图形的边数依次为

3，3×4，3×4^2，3×4^3，3×4^4，…，$3\times4^{n-1}$，…

对于每一条边（第 n 个步骤），下一个步骤都将增加

$\left(\frac{1}{9}\right)^2$的面积，这样雪花曲线所围的面积为

$$S=1+\frac{1}{9}\times3+\left(\frac{1}{9}\right)^2\times3\times4+\left(\frac{1}{9}\right)^3\times3\times4^2+\cdots+\left(\frac{1}{9}\right)^n\times3\times4^{n-1}+\cdots$$

$$=1+\frac{3}{9}\times\left[1+\left(\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\cdots+\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}+\cdots\right]$$

$$=1+\frac{3}{9}\times\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$$

即为原来三角形面积的$\frac{8}{5}$倍。

我们把数学家欧内斯托·切萨罗对雪花曲线所描述的性质叫“分形”。如果把它的部分保留下来，这部分保存着分形的本质，它又能使自己生长。但究竟什么是“分形”，数学家并未给出一个定义来，恐怕是避免限制对这一新的数学领域正在形成的分形作品和分形概念的创造力。

31.3 其他分形例子

1. 正方形雪花图

作一个正方形，设每边长为 $4a$，再将每边用一凸一凹的总长为 $8a$ 的折线来代替（如图 31-5）。图 31-5 中是只对原正方形作一次变形的图形，如果连续作两次，便可构成一朵绚丽多彩的雪花图案（如图 31-6）。

由作图可知，每增加一个小正方形，同时又减少一个相同的小正方形，于是面积是不变的，只是每作一次，周长增加一

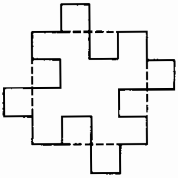


图 31-5

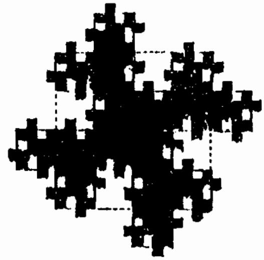


图 31-6

倍。如此重复作下去，周长会变得更长，图形变得更美，如此无限作下去，周长将会无限长，面积却是一个定值 $16a^2$。

2. 皮亚诺曲线

它是 18 世纪 90 年代由数学家皮亚诺作出的。先作出一条线段，然后在此线段的三分之一处，向两边作出一个正方形，再在每一条线段的三分之一处，再向两边各作一个更小的正方形（如图31-7，图 31-8，图 31-9 为皮亚诺曲线的最初三个阶段）。如此无限地作下去，若各正方形都在同一平面，则皮亚诺曲线将会充满一个给定范围，亦即在此平面给定范围每一点都会有曲线通过。

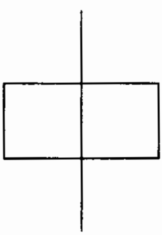


图 31-7

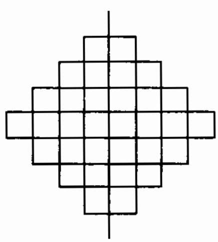


图 31-8

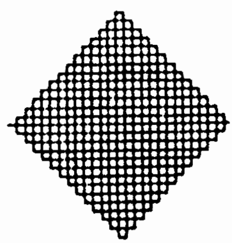
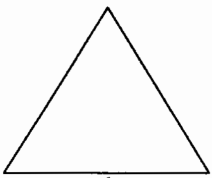


图 31-9

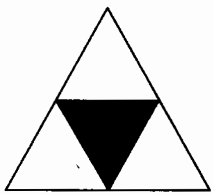
3. 谢尔宾斯基三角形

先作一个正三角形（如图 31-10），挖去一个“中心三角形”（即以原三角形各边的中点为顶点的三角形）（如图 31-11），然后在剩下的小三角形中又挖去一个“中心三角形”（如图 31-12），我们用黑色三角形代表挖去的面积，那么白三角形为剩下的面积（我们称白三角形为谢尔宾斯基三角形）。如果用上面的方法无限连续地作下去，则谢尔宾斯基三角形的面积越趋近于零，而它的周长越趋近于无限大（图 31-10～图 31-14）。



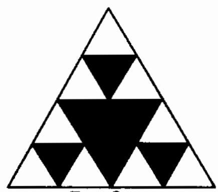
1

图 31-10



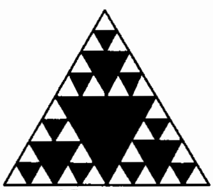
$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

图 31-11



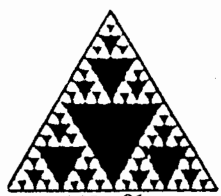
$\frac{7}{16}+\frac{9}{16}=1$

图 31-12



$\frac{37}{64}+\frac{27}{64}=1$

图 31-13



$\frac{175}{256}+\frac{81}{256}=1$

图 31-14

31.4 分形是真实的吗

分形思想初见于 1875～1925 年间一些数学家们的著作。当时人们称这些曲线为“病态曲线”，而将一些研究对象称为“畸形现象”。这些“怪物”既不被当时的数学家接受，也被认为没有丝毫的科学价值。因为他们所得到的“分形”与公认的数学相矛盾（如有些分形具有有限面积，却具有无限的周长；有些分形曲线竟能充满空间）。

分形是以无限多的形状呈现出来的美妙物体。分形是一种对象，即将其细微部分放大后，其结构看起来仍与原来一样。这与把图的一部分放大后便变得比较平淡形成了鲜明的对比。分形分为两部分：一是几何分形，它不断重复同一种花样图案；另一种是随机分形，现在计算机已能够把这些“畸形怪物”立即分形并给画出来，显示出它们的形状、艺术图案或细微的景观。

我们可以把分形当作一个不断生长的曲线，要观察一个分形，必须看到它是在运动中，我们看到的一个分形图片或照片时，只是看到它某一瞬间的样子，“冻结”在生长过程中的一个阶段。

以前认为毫无用处的分形，如今几乎出现在每一件事物中——描绘海岸线、云彩、人口分布、电影场景等等都有其用处，即在生态学、天文学、气象学、电影摄影学和经济学等方面都能找到分形的用处，而且对“病态曲线”的研究已形成一门数学的分支——分形几何学。

伽利略说：“宇宙是由数学写成的。”数学工具提供了我们

试图了解、解释和再现自然现象的手段。

31.5 分形图形欣赏

分形不但是数学，而且也是艺术。分形是数学和电脑的产物，可用绝对精确的数学式子进行无数次“迭代”来产生和“繁殖”。下面我们来欣赏用电脑制作的几幅分形图画，不但惊异数学的奥妙，也欣赏到数学艺术的美。

1. 绮思飞舞

如图 31-15：不禁想起了李白《清平调》中的著名诗句：“云想衣裳花想容”！

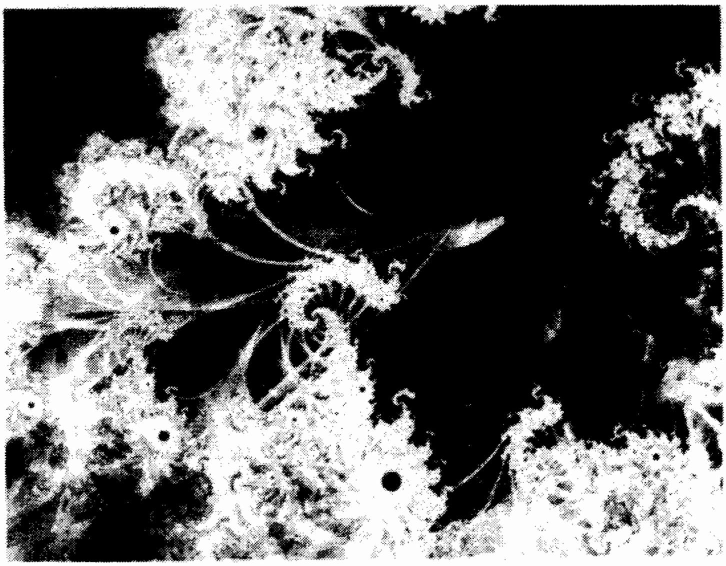


图 31-15

2. 随风飘去

图 31-16：是一片“随风飘去”的落叶，还是一缕“随风扬起”的少女的发尾?!

图 31-16

3. 想像

图 31-17：是艺术的抽象，也是抽象的艺术。如果您若“置身其中”，您看到的将是什么？您若“置身其外”，又会作怎样的理解和怎样的想像？您对它怎样命名、怎样称呼都可以！

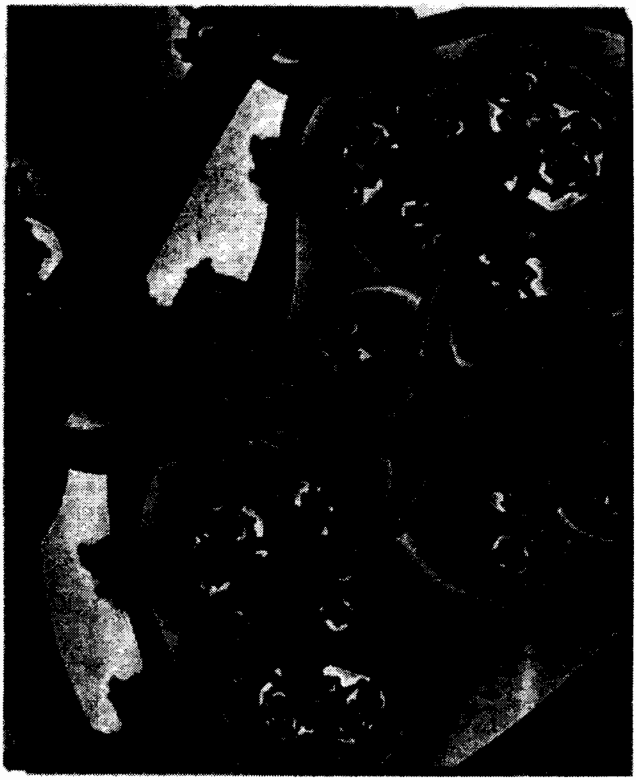


图 31-17